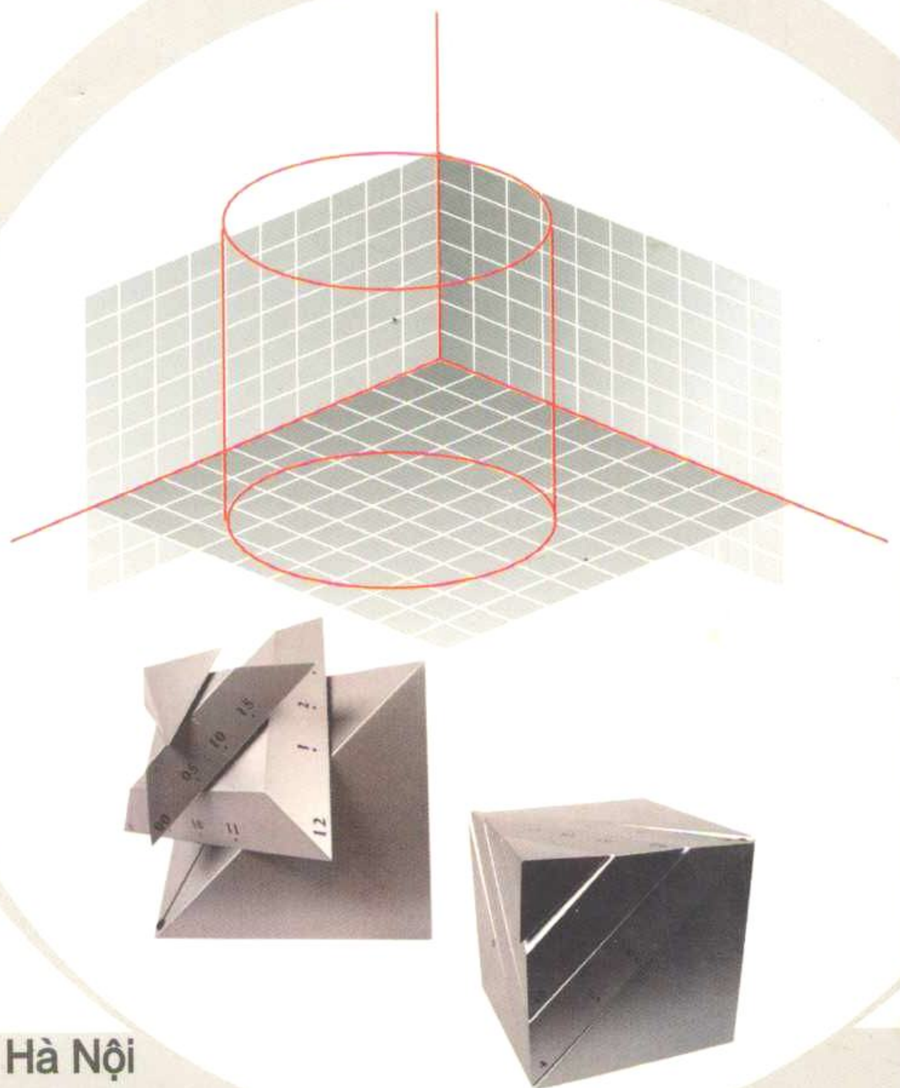
NGUYỄN VĂN CHI
NGUYỄN NGỌC KHOA

Phân loại & Phương pháp giải CÁC DẠNG TOÁN HÌNH HỌC 10

CƠ BẢN & NÂNG CAO





Nhà xuất bản
Đại học Quốc gia Hà Nội

NGUYỄN VĂN CHI – NGUYỄN NGỌC KHOA

PHÂN LOẠI VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI CÁC DẠNG TOÁN

HÌNH HỌC

10

Biên soạn theo chương trình của Bộ Giáo dục & Đào tạo

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

LỜI GIỚI THIỆU

Nhằm góp phần giúp các em học sinh Trung học phổ thông có tài liệu luyện tập môn Toán, nắm được phương pháp giải các dạng toán (Đại số và Hình học) lớp 10, chúng tôi biên soạn cuốn sách ***Phân loại và phương pháp giải các dạng Hình học 10*** theo chương trình mới của Bộ Giáo dục và Đào tạo.

Tập sách gồm các nội dung :

- Phương pháp giải từng dạng toán Hình học.
- Bài tập vận dụng (cơ bản và nâng cao).
- Bài giải.

Với các nội dung trình bày trên, chúng tôi hi vọng sẽ giúp các em học sinh nắm vững kiến thức cơ bản và phương pháp giải các dạng toán từ cơ bản đến nâng cao.

Chúc các em chăm ngoan, học giỏi và thành đạt.

Xin cảm ơn.

Tác giả

Chương 1. VECTƠ

Dạng 1. – CÁCH XÁC ĐỊNH VECTƠ
– PHƯƠNG VÀ HƯỚNG CỦA CÁC VECTƠ
– VECTƠ BẰNG NHAU, ĐỐI NHAU

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Cách xác định vectơ

– Cách xác định một vectơ là chỉ ra sự tồn tại một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai mút của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.

– Để xác định vectơ ta lập ra các cặp điểm có thứ tự. Số cặp điểm tìm được là số các vectơ cần xác định.

2. Phương và hướng của các vectơ

– Muốn khảo sát phương của hai vectơ ta xét xem các đường thẳng chứa hai vectơ đó có song song với nhau, cắt nhau hay trùng nhau.

– Muốn khảo sát hướng của hai vectơ là xem khi nào hai vectơ cùng hướng, ngược hướng hoặc không có quan hệ đó.

3. Vectơ bằng nhau – đối nhau

– Để chứng minh hai vectơ khác vectơ – không bằng nhau ta cần chỉ rõ đồng thời hai điều kiện :

+ Độ dài của hai vectơ phải bằng nhau.

+ Hai vectơ phải cùng hướng.

– Để chứng minh hai vectơ khác vectơ – không là đối nhau ta cần chỉ rõ đồng thời hai điều kiện :

+ Độ dài hai vectơ bằng nhau.

+ Hai vectơ là ngược hướng.

B. BÀI TẬP

Bài 1. Với hai điểm A và B phân biệt, ta có được bao nhiêu vectơ có điểm đầu và điểm cuối là A hoặc B ?

Bài 2. Cho tam giác MNP. Có bao nhiêu vectơ được lập từ các cạnh của tam giác ?

Bài 3. Cho bốn điểm M, N, P, Q. Có bao nhiêu vectơ được lập ra từ bốn điểm trên ?

Bài 4. Cho hình thang ABCD có hai đáy là AB và CD. Chứng tỏ rằng vectơ $\vec{AB}$:

a) Cùng hướng với vectơ $\vec{DC}$.

b) Ngược hướng với vectơ $\vec{CD}$.

Bài 5. Gọi M là trung điểm của đoạn thẳng AB. Chứng minh :

a) $\vec{MA} = -\vec{MB}$ b) $AM = MB$.

Bài 6. Cho hình thoi ABCD. Chứng minh :

a) $|\vec{AB}| = |\vec{BC}|$ b) $\vec{AB} = -\vec{CD}$.

Bài 7. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O). Gọi H là trực tâm của ΔABC và B' là điểm đối xứng với B qua tâm O. Hãy so sánh các vectơ $\vec{HA}$ và $\vec{CB'}$; $\vec{AB'}$ và $\vec{HC}$.

Dạng 2. – CÁCH DỰNG TỔNG CỦA HAI HOẶC NHIỀU VECTƠ – GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT VỀ ĐỘ DÀI VECTƠ

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Cách dựng tổng của hai hoặc nhiều vectơ

Ta chọn một điểm làm gốc và sử dụng quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành hoặc quy tắc đường gấp khúc.

2. Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất về độ dài vectơ

Tìm độ dài lớn nhất hoặc bé nhất của một vectơ phụ thuộc vào tổng của hai hay nhiều vectơ thay đổi bằng cách rút gọn biểu thức trong dấu độ dài đưa về một vectơ và xác định độ dài vectơ đó.

B. BÀI TẬP

Bài 8. Cho bốn điểm M, N, P, Q. Dựng vectơ tổng của hai vectơ $\vec{MN}$ và $\vec{PQ}$; $\vec{MP}$ và $\vec{NQ}$.

Bài 9. Cho ΔABC đều có độ dài cạnh bằng a.

a) Xác định vectơ $\vec{BA} + \vec{BC}$.

b) Tính $|\vec{BA}| + |\vec{BC}|$ theo a.

Bài 10. Chứng minh rằng $\vec{MN} = \vec{PQ}$ thì $\vec{MP} = \vec{NQ}$.

Bài 11. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng ta luôn có :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{0}.$$

Bài 12. Cho ΔABC. Dựng điểm I thỏa mãn $\vec{IA} + \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$.

Bài 13. Cho ΔABC. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, CA và AB. Chứng minh : $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$.

Bài 14. Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ – không.

Chứng minh : $|\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$.

Dạng 3. HIỆU HAI VECTƠ

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Dựng hiệu hai vectơ

– Dùng quy tắc về hiệu hai vectơ để dựng hiệu hai vectơ.

– Chuyển bài toán tìm hiệu hai vectơ thành bài toán tìm tổng của hai vectơ.

2. Chứng minh một số bài toán về hiệu của hai vectơ

Dùng quy tắc về hiệu vectơ, tính chất của phép cộng vectơ để chứng minh hoặc rút gọn biểu thức vectơ.

B. BÀI TẬP

Bài 15. Cho bốn điểm M, N, P, Q.

Chứng minh rằng : $\vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{MQ} + \vec{PN}$.

Bài 16. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt.

Dựng các vectơ : $\vec{a} = \vec{AB} - \vec{AC}$; $\vec{b} = \vec{AB} - \vec{CD}$.

Bài 17. Cho ΔABC. Dựng điểm G thỏa mãn : $\vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$.

Bài 18. Cho các vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Chứng minh : $\left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \le |\vec{a} - \vec{b}|$.

Bài 19. Cho 6 điểm A, B, C, D, E, F.

Chứng minh : $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} = \vec{AF} + \vec{BD} + \vec{CE}$.

Bài 20. Cho hình bình hành MNPQ.

Chứng minh rằng : $\vec{QM} - \vec{QN} + \vec{QP} = \vec{0}$.

Dạng 4. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. PHƯƠNG PHÁP

CÁCH XÁC ĐỊNH TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

1. Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k.\vec{a}$, được xác định :

a) – Nếu $k \ge 0$ thì $k.\vec{a}$ cùng hướng với $\vec{a}$

– Nếu $k < 0$ thì $k.\vec{a}$ ngược hướng với $\vec{a}$.

b) Độ dài vectơ $k.\vec{a}$ bằng $|k|.|\vec{a}|$.

2. Tính chất

Với hai vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$ bất kì và mọi số thực k, l ta có :

- $k(l.\vec{a}) = (k.l)\vec{a}$
- $(k + l)\vec{a} = k\vec{a} + l\vec{a}$
- $k(\vec{a} \pm \vec{b}) = k.\vec{a} \pm k.\vec{b}$
- $k.\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} k = 0 \\ \vec{a} = \vec{0} \end{array}\right.$

3. Điều kiện để hai vectơ cùng phương

Vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{b}$ $(\vec{b} \neq \vec{0}) \Leftrightarrow$ có số k sao cho $\vec{a} = k.\vec{b}$.

4. Điều kiện để ba điểm A, B, C thẳng hàng

Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho $\vec{AB} = k.\vec{AC}$.

5. Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương

Cho $\vec{a}$ và $\vec{b}$ không cùng phương. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều có thể biểu thị một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Nghĩa là có duy nhất cặp số h và k sao cho : $\vec{x} = h.\vec{a} + k.\vec{b}$.

B. BÀI TẬP

Bài 21. Cho tứ giác ABCD. Gọi E và F lần lượt là trung điểm các cạnh AB và CD.

Chứng minh : $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC} = 2\vec{EF}$.

Bài 22. Cho ΔABC. Gọi G là trọng tâm của ΔABC và N là một điểm bất kì. Chứng minh :

a) $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$

b) $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = 3\vec{NG}$.

Bài 23. Cho hai điểm phân biệt A và B. Tìm điểm M sao cho :

$$3\vec{MA} + 4\vec{MB} = \vec{0}.$$

Bài 24. Cho ΔABC và một điểm K tùy ý. Chứng minh rằng vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} - 2\overrightarrow{KC}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm K.

Bài 25. Cho hai điểm M, N và đường thẳng a. Tìm trên đường thẳng a điểm A sao cho $|\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{AN}|$ nhỏ nhất.

Bài 26. Cho ΔABC có hai trung tuyến là AM và BN. Hãy phân tích các vectơ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ và $\overrightarrow{CA}$ theo hai vectơ $\vec{a} = \overrightarrow{AM}$ và $\vec{b} = \overrightarrow{BN}$.

Bài 27. Cho ΔABC. Gọi M, N, P là những điểm xác định bởi :

$$3\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{NA} - 2\overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}.$$

a) Tính $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{AP}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Tính $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{MP}$ theo $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

Nêu nhận xét ba điểm M, N, P.

Dạng 5. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Cách xác định tọa độ của một vectơ

Trong mặt phẳng Oxy cho vectơ $\vec{u}$ tùy ý.

- Vẽ vectơ $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$; gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu vuông góc của A lên Ox và Oy.

Ta có : $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2}$ và cặp số duy nhất (x; y) để $\overrightarrow{OA_1} = x.\vec{i}$ và $\overrightarrow{OA_2} = y.\vec{j}$.

Như vậy $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Cặp số (x; y) duy nhất gọi là tọa độ của vectơ $\vec{u}$.

Ta viết : $\vec{u} = (x; y)$ hoặc $\vec{u}(x; y)$.

Lưu ý : Nếu $\vec{u} = (x; y)$, $\vec{v} = (x'; y')$ thì $\vec{u} = \vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y'. \end{cases}$

2. Cách xác định tọa độ của một điểm

Tọa độ của một điểm M trong mặt phẳng Oxy chính là tọa độ của vectơ $\vec{OM}$.

$$M = (x; y) \Leftrightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Chú ý : Cho hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$. Ta có :

$$\vec{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A).$$

3. Cách xác định tọa độ của tổng, hiệu hai vectơ; tọa độ của một số nhân với một vectơ

Cho $\vec{u}(x; y)$ và $\vec{v}(x'; y')$. Khi đó :

$$\vec{u} + \vec{v} = (x + x'; y + y')$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (x - x'; y - y')$$

$$k.\vec{u} = (kx; ky) \quad \text{với } k \in R.$$

4. Cách xác định tọa độ trung điểm của đoạn thẳng, tọa độ trọng tâm của một tam giác

- Cho đoạn thẳng AB có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$ và $I(x_I; y_I)$ là trung điểm của đoạn thẳng AB.

  Ta có : $x_I = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_I = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

- Cho ΔABC có $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $C(x_C; y_C)$ và $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của ΔABC.

  Khi đó : $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3}$; $y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3}$.

B. BÀI TẬP

Bài 28. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, các mệnh đề sau đây đúng hay sai :

a) $\vec{a}(-2; 0)$ và $\vec{i}(1; 0)$ là hai vectơ ngược hướng.

b) $\vec{a}(2; 3)$ và $\vec{b}(-2; -3)$ là hai vectơ đối nhau.

c) Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng

nhau và có tung độ bằng nhau.

d) $\vec{a}(-3; -5)$ và $\vec{b}(-5; -3)$ là hai vectơ đối nhau.

Bài 29. Viết tọa độ các vectơ :

$$\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j}; \quad \vec{b} = \frac{1}{2}\vec{i} - 3\vec{j}; \quad \vec{c} = -2\vec{i} + 3\vec{j}; \quad \vec{d} = -3\vec{i} - 5\vec{j}.$$

Bài 30. Cho $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-3; 4)$. Tìm tọa độ của :

a) $\vec{a} + \vec{b}$ b) $\vec{a} - \vec{b}$ c) $2\vec{a} - 3\vec{b}$.

Bài 31. Cho ba điểm A(–1; –1), B(2; 5) và C(–3; –5). Chứng minh ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 32. Cho A(1; 1), B(3; 2) và C(m + 4; 2m + 1). Tìm m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 33. Cho $\vec{a}(-1; 2)$, $\vec{b}(2; 3)$ và $\vec{c}(4; -1)$. Tìm tọa độ của vectơ :

a) $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$

b) $\vec{v} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c}$.

Bài 34. Cho $\vec{a} = (2; -3)$, $\vec{b} = (3; 4)$. Hãy phân tích vectơ $\vec{c} = (5; -2)$ theo $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Bài 35. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm A(–2; 3), B(–1; 2) và C(2; 1).

a) Tìm tọa độ trọng tâm G của ΔABC.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho C là trọng tâm của ΔABD.

c) Tìm tọa độ điểm E sao cho ABCE là hình bình hành.

Chương 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

Dạng 1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ (từ 0° đến 180°)

A. PHƯƠNG PHÁP

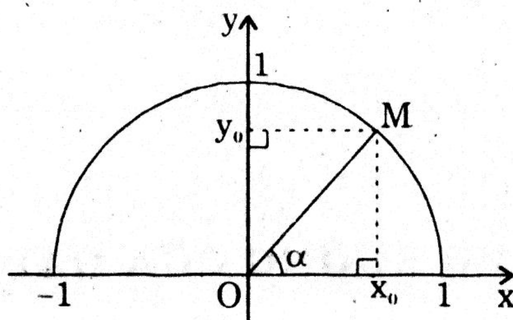
1. Cách xác định giá trị lượng giác của góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$)

Với mỗi góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$), điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$.

Ta có : $y_0 = \sin\alpha$; $\quad x_0 = \cos\alpha$

$$\frac{y_0}{x_0} = \tan\alpha \ (x_0 \neq 0); \quad \frac{x_0}{y_0} = \cot\alpha \ (y_0 \neq 0)$$

Giá trị lượng giác của góc α là $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\tan\alpha$ và $\cot\alpha$.



2. Cách xác định giá trị lượng giác của hai góc bù nhau

Ta sử dụng công thức sau :

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(180^\circ - \alpha) = -\tan\alpha \quad (\alpha \neq 90^\circ)$$

$$\cot(180^\circ - \alpha) = -\cot\alpha \quad (\alpha \neq 0^\circ \text{ và } \alpha \neq 180^\circ)$$

B. BÀI TẬP

Bài 36. Với giá trị nào của α để :

a) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ khác dấu.

b) $\sin\alpha$ và $\cos\alpha$ cùng dấu.

Bài 37. Xác định vị trí của điểm M trên nửa đường tròn đơn vị trong các trường hợp sau (với $\alpha = \widehat{MOx}$)

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ b) $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$.

Bài 38. Tính giá trị các biểu thức :

a) $a\sin0^\circ + b\cos0^\circ + c\tan0^\circ$

b) $a\sin30^\circ + b\cos150^\circ + c\tan135^\circ$.

Bài 39. Đơn giản các biểu thức :

a) $\cos25^\circ + \sin25^\circ + \cos155^\circ - \sin155^\circ$

b) $\tan45^\circ + \tan135^\circ + \cot45^\circ + \cot135^\circ$.

Bài 40. Biết $\tan\alpha = 2$. Tìm giá trị lượng giác còn lại của góc α.

Bài 41. Biết $\sin\alpha + \cos\alpha = a$. Chứng minh : $|a| \le \sqrt{2}$.

Dạng 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Dùng định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$. Tích vô hướng của $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi công thức :

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})$$

Chú ý :

- Trường hợp ít nhất một trong hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng vectơ $\vec{0}$ ta

quy ước : $\vec{a}.\vec{b} = 0$

- Với $\vec{a}$ và $\vec{b}$ khác vectơ $\vec{0}$, ta có : $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$
- $\vec{a}.\vec{a} = \vec{a}^2 = |\vec{a}|.|\vec{a}|.\cos 0^\circ = |\vec{a}|^2$

2. Sử dụng các tính chất của tích vô hướng

Với ba vectơ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ bất kì và mọi số k ta có :

- $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$ (giao hoán)
- $\vec{a}.(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ (phân phối với phép cộng)
- $(k\vec{a}).\vec{b} = k(\vec{a}.\vec{b}) = \vec{a}.(k\vec{b})$
- $\vec{a}^2 \geq 0$
- $\vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$

3. Cách xác định biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Trên mặt phẳng tọa độ $(0; \vec{i}; \vec{j})$ cho $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$.

Ta có : $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$.

4. Cách xác định độ dài của vectơ

Độ dài của vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ được tính theo công thức :

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

5. Cách xác định độ lớn về góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a} = (a_1; a_2)$ và $\vec{b} = (b_1; b_2)$ đều khác vectơ $\vec{0}$, ta có :

$$\cos(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|} = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}.\sqrt{b_1^2 + b_2^2}}$$

6. Cách xác định khoảng cách giữa hai điểm

Khoảng cách giữa hai điểm $A(x_A; y_A)$ và $B(x_B; y_B)$ là :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

B. BÀI TẬP

Bài 42. Cho ΔABC đều có độ dài cạnh bằng a. Tính :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{AB}$.

Bài 43. Cho ΔABC ($\widehat{A} = 90^\circ$) biết AC = a; AB = $a\sqrt{3}$. Tính :

a) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{CB}$ c) $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$.

Bài 44. Tìm vị trí của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ để : $(\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2$.

Bài 45. Cho ΔABC có AB = 4; AC = 8 và $\widehat{A} = 60^\circ$. Trên tia AC lấy điểm D và đặt $\overrightarrow{AD} = k.\overrightarrow{AC}$. Tìm k để BD vuông góc với trung tuyến AE (E $\in$ BC) của ΔABC.

Bài 46. Cho ΔABC biết AB = c; AC = b và BC = a.

a) Tính độ dài đường trung tuyến AM (M $\in$ BC) của ΔABC.

b) Tính độ dài đường phân giác AD (D $\in$ BC) của ΔABC.

Bài 47. Chứng minh ba đường cao trong một tam giác đồng quy tại một điểm.

Bài 48. Cho ΔABC với ba trung tuyến AM, BN và CP.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CP} = 0$.

Bài 49. Cho ΔABC, H là trực tâm, K là trung điểm của BC.

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KH} = \frac{1}{4}BC^2$.

Bài 50. Cho ΔABC. Tìm tập hợp những điểm N thỏa mãn :

$$\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}.$$

Bài 51. Tính $\vec{a}.\vec{b}$ biết :

a) $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 4)$ b) $\vec{a} = (-3; -7)$, $\vec{b} = (5; 2)$.

Bài 52. Cho ΔABC có ba góc nhọn.

Chứng minh rằng : $\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}$.

Dạng 3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC VÀ GIẢI TAM GIÁC

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Quan hệ giữa cạnh và góc trong tam giác (định lí cosin)

Cho ΔABC có AB = c; AC = b; BC = a

Ta có : $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

2. Quan hệ giữa cạnh, góc và bán kính đường tròn ngoại tiếp trong tam giác (định lí sin)

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(R : bán kính đường tròn ngoại tiếp ΔABC)

3. Quan hệ giữa độ dài đường trung tuyến với độ dài ba cạnh của một tam giác

Cho ΔABC có AB = c; AC = b; BC = a. Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến xuất phát từ ba đỉnh A, B, C của ΔABC.

Ta có : $m_a^2 = \dfrac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2}$

$m_b^2 = \dfrac{2(a^2 + c^2) - b^2}{4} \Leftrightarrow a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \dfrac{b^2}{2}$

$m_c^2 = \dfrac{2(a^2 + b^2) - c^2}{4} \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \dfrac{c^2}{2}$

4. Quan hệ giữa diện tích tam giác với độ dài các cạnh và góc hoặc độ dài các cạnh với bán kính đường tròn ngoại tiếp, bán kính đường tròn nội tiếp tam giác.

ĐẠI HỌC QUOC GIA HA NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN

- $S = \frac{1}{2}bc.\sin A = \frac{1}{2}ac.\sin B = \frac{1}{2}ab.\sin C$
- $S = \frac{abc}{4R}$
- $S = p.r$ (với p là nửa chu vi của ΔABC)
- $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

B. BÀI TẬP

Bài 53. Cho ΔABC có AC = 7cm; AB = 5cm; $\sin A = \frac{4}{5}$.

a) Tính độ dài cạnh BC.

b) Tính đường cao AH ($H \in BC$) và bán kính R của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Bài 54. Cho ΔABC có AB = 6cm; AC = 8cm; BC = 7cm.

a) Tính độ dài đường cao BH ($H \in AC$).

b) Tính độ dài đường trung tuyến AM ($M \in BC$).

Bài 55. Cho ΔABC có AB = c; AC = b; BC = a. Gọi h_a, h_b, h_c lần lượt là ba đường cao xuất phát từ ba đỉnh A, B, C của ΔABC.

Chứng minh rằng nếu b = c = 2a thì $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{h_a}$.

Bài 56. Cho ΔABC có AB = c; AC = b; BC = a và G là trọng tâm của ΔABC. Chứng minh : $a^2 + b^2 + c^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.

Bài 57. Cho ΔABC có AB = c; AC = b; BC = a; $\hat{A} = 30^\circ$; a – b = 1cm và đường cao kẻ từ đỉnh C của tam giác ABC có độ dài h_c = 2cm. Tính cosB.

Bài 58. Tính độ dài ba cạnh của ΔABC, biết độ dài ba đường trung tuyến xuất phát từ ba đỉnh A, B, C lần lượt là $m_a = \sqrt{2}$cm; $m_b = \sqrt{3}$cm; m_c = 1cm.

Bài 59. Cho ΔABC. Chứng minh rằng :

$$\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C = 4\sin A.\sin B.\sin C.$$

Bài 60. Cho ΔABC có diện tích là S và bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là R.

Chứng minh rằng : $S = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C$.

Bài 61. Giải tam giác ABC biết :

a) $a = 4cm$, $b = 5cm$ và $\hat{C} = 30^\circ$.

b) $b = 7cm$, $c = 12cm$ và $\hat{A} = 120^\circ$.

c) $a = 15cm$, $b = 18cm$ và $c = 20cm$.

Bài 62. Biết hai lực cùng tác động vào một vật và tạo với nhau một góc 50°. Biết cường độ của hai lực đó là 4N và 5N.

Tính cường độ của lực tổng hợp.

Bài 63. Cho ΔABC có $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$ và một điểm D tùy ý trên cạnh BC. Đặt $AD = d$; $BD = e$; $CD = f$. Chứng minh :

a) $eb^2 + fc^2 = ad^2 + aef$ (định lí Stewart).

b) Nếu D là trung điểm của BC, tính độ dài đường trung tuyến AD theo độ dài ba cạnh của ΔABC.

Bài 64. Cho ΔABC có $AB = c$; $AC = b$; $BC = a$. Tính độ dài các đường phân giác trong xuất phát từ ba đỉnh của ΔABC.

Bài 65. Cho ΔABC cân tại A với $BC = a$; $AB = AC = b$; $\widehat{BAC} = 20^\circ$.

Chứng minh : $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Chương 3. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Dạng 1. LẬP PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

Trong mặt phẳng Oxy cho đường thẳng Δ đi qua điểm $M_0(x_0; y_0)$ và nhận $\vec{u} = (u_1; u_2)$ làm vectơ chỉ phương.

Với mỗi điểm M(x; y) bất kì trong mặt phẳng, ta có :

$$\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0; y - y_0).$$

Khi đó : $M \in \Delta \Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M}$ cùng phương với $\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{M_0M} = t.\vec{u}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = tu_1 \\ y - y_0 = tu_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_0 + tu_1 \\ y = y_0 + tu_2 \end{cases} \quad (1)$$

Hệ phương trình (1) gọi là phương trình tham số của đường thẳng Δ (t : tham số).

- Nếu đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (u_1; u_2)$ với $u_1 \neq 0$ thì Δ có hệ số góc là $\frac{u_2}{u_1}$.
- Vectơ $\vec{n}$ được gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ nếu $\vec{n} \neq \vec{0}$ và $\vec{n}$ vuông góc với vectơ chỉ phương của Δ.

B. BÀI TẬP

Bài 66. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua hai điểm

$A(-2; -3)$ và $B(1; 6)$. Tính hệ số góc của đường thẳng Δ.

Bài 67. Cho đường thẳng Δ có phương trình $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$ và vectơ $\vec{n}(3; -2)$. Chứng tỏ rằng $\vec{n}$ và vectơ chỉ phương của Δ vuông góc với nhau.

Bài 68. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau :

a) Δ đi qua điểm $A(2; 3)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2)$.

b) Δ đi qua điểm $B(2; -3)$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 1)$.

Bài 69. Lập phương trình tham số của đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau :

a) Đi qua điểm $A(1; 1)$ và song song với trục hoành.

b) Đi qua điểm $B(2; -1)$ và song song với trục tung.

Dạng 2. – LẬP PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG – PHƯƠNG TRÌNH CHÍNH TẮC CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A. PHƯƠNG PHÁP

- Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng : $ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$.
- Ngược lại, mỗi phương trình dạng $ax + by + c = 0$ với $a^2 + b^2 \neq 0$ đều là phương trình tổng quát của một đường thẳng xác định, nhận $\vec{n} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến.

Chú ý : Đường thẳng $\Delta : ax + by + c = 0$ có :

+ Vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (a; b)$

+ Vectơ chỉ phương $\vec{u} = (b; -a)$.

- Với $\vec{u} = (u_1; u_2)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ, $u_1 \neq 0$ và $u_2 \neq 0$.

Phương trình : $\dfrac{x - x_0}{u_1} = \dfrac{y - y_0}{u_2}$ gọi là phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

B. BÀI TẬP

Bài 70. Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ trong các trường hợp sau :

a) đi qua hai điểm A(1; 1) và B(2; −1).

b) đi qua điểm M(−1; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (6; 2)$.

c) có hệ số góc k = −3 và đi qua N(1; −5).

Bài 71. Cho phương trình tham số của đường thẳng Δ là $\begin{cases} x = -3 + 5t \\ y = 2 - 2t. \end{cases}$

a) Lập phương trình chính tắc của đường thẳng Δ.

b) Lập phương trình tổng quát của đường thẳng Δ.

Bài 72. Cho tam giác có ba đỉnh A(1; 2), B(3; 5) và C(5; 4). Viết phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ A.

Bài 73. Lập phương trình các cạnh tam giác ABC trong mặt phẳng tọa độ, biết tọa độ điểm C(−4; −5) và hai đường cao có phương trình là 5x + 3y − 4 = 0 và 3x + 8y + 13 = 0.

Bài 74. Lập phương trình các cạnh tam giác ABC trong mặt phẳng tọa độ, biết tọa độ điểm C(4; −2), đường cao và đường trung tuyến xuất phát từ đỉnh A có phương trình lần lượt là :

$$2x - 3y + 12 = 0 \quad \text{và} \quad 2x + 3y = 0.$$

Bài 75. Cho hai điểm M(3; 0) và N(0; −1).

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm A(2; 3) và song song với MN.

b) Viết phương trình tổng quát của đường trung trực của đoạn thẳng MN.

Bài 76. Cho hình vuông ABCD biết tọa độ đỉnh A(–1; 2) và phương trình của một đường chéo là $\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2}$. Tìm tọa độ ba đỉnh còn lại của hình vuông.

Dạng 3. TÌM KHOẢNG CÁCH TỪ MỘT ĐIỂM ĐẾN MỘT ĐƯỜNG THẲNG VÀ GÓC TẠO BỞI HAI ĐƯỜNG THẲNG

A PHƯƠNG PHÁP

1. Tìm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ và đường thẳng Δ có phương trình :

$$ax + by + c = 0.$$

Khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng Δ là :

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. Cho đường thẳng $\Delta_1 : ax_1 + by_1 + c_1 = 0$

và đường thẳng $\Delta_2 : ax_2 + by_2 + c_2 = 0$.

Góc tạo bởi giữa hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 được xác định theo công thức : $\cos(\Delta_1, \Delta_2) = \frac{|a_1a_2 + b_1b_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}.\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

Chú ý :

- Phương trình đường phân giác của góc tạo bởi hai đường thẳng Δ_1 và Δ_2 là : $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

- Đường thẳng Δ_1 và đường thẳng Δ_2 vuông góc với nhau

$$\Leftrightarrow \quad a_1a_2 + b_1b_2 = 0.$$

B. BÀI TẬP

Bài 77. Tìm khoảng cách từ một điểm đến đường thẳng trong các trường hợp sau :

a) M(1; 3) đến đường thẳng $\Delta_1 : 2x - 3y + 5 = 0$.

b) N(–2; –3) đến đường thẳng $\Delta_2 : 3x + 4y + 1 = 0$.

Bài 78. Tính bán kính của đường tròn tâm Q(1; 2) tiếp xúc với đường thẳng $2x + 3y - 15 = 0$.

Bài 79. Cho ΔABC với A(–2; 0), B(3; 2), C(2; –5) và đường thẳng Δ : $x - 3y - 2 = 0$.

a) Đường thẳng Δ cắt cạnh nào của tam giác ?

b) Tìm điểm P ở trên Δ sao cho $|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}|$ nhỏ nhất.

Bài 80. Cho ba điểm A(2; 0), B(4; 1) và C(1; 2).

a) Viết phương trình đường thẳng AB và AC.

b) Viết phương trình đường phân giác trong của góc A.

Bài 81. Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm A(0; 1) và tạo với đường thẳng $\Delta : x + 2y + 3 = 0$ một góc 45°.

Bài 82. Cho đường thẳng $\Delta : (m - 1)x + (m - 2)y + 2m - 1 = 0$ và hai điểm A(1; 0) và B(2; 3). Tìm m để đường thẳng Δ cắt đoạn thẳng AB.

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN VÀ CÁCH NHẬN DẠNG PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

A. PHƯƠNG PHÁP

1. Cách xác định một điểm thuộc đường tròn

Cho đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm I(a; b) và bán kính R.

Điểm M(x; y) thuộc đường tròn $\Leftrightarrow$ $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

2. Cách nhận dạng phương trình đường tròn

Phương trình $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 > c$ là phương trình của đường tròn tâm I(a; b) và bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$.

B. BÀI TẬP

Bài 83. Cho hai điểm A(–3; 4) và B(3; –4). Viết phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ nhận AB làm đường kính.

Bài 84. Tìm tâm và bán kính của các đường tròn sau :

a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$

b) $16x^2 + 16y^2 - 8x + 16y - 11 = 0$.

Bài 85. Lập phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ trong các trường hợp sau :

a) Đi qua ba điểm A(1; –2), B(1; 2) và C(5; 2).

b) Có tâm I(2; 3) và đi qua M(–1; –1).

c) Có tâm I(1; –2) và tiếp xúc với đường thẳng $3x + 4y - 20 = 0$.

Bài 86. Lập phương trình đường tròn trong các trường hợp sau :

a) Tiếp xúc với hai trục tọa độ và đi qua điểm M(2; –1).

b) Tiếp xúc với trục Ox và đi qua hai điểm N(1; 4) và Q(1; 1).

Dạng 2. PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG TRÒN

A. PHƯƠNG PHÁP

Cách lập phương trình tiếp tuyến

Cho điểm $M(x_0; y_0)$ nằm trên đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm I(a; b).

Phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ có dạng : $(x_0 - a)(x - x_0) + (y_0 - b)(y - y_0) = 0$.

B. BÀI TẬP

Bài 87. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$. Viết phương trình tiếp tuyến tại điểm M(3; 5).

Bài 88. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = 9$. Viết phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C})$ trong các trường hợp :

a) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $2x + y - 5 = 0$.

b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $3x + 2y - 5 = 0$.

Bài 89. Cho đường tròn $(\mathscr{C}) : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$

và đường thẳng $\Delta : x - y + 2m + 3 = 0$.

Xét vị trí tương đối của đường thẳng Δ và đường tròn $(\mathscr{C})$.

Bài 90. Cho đường cong $(\mathscr{C}_m) : x^2 + y^2 + 2mx - 4my + 2m + 3 = 0$. Tìm m để $(\mathscr{C}_m)$ là một đường tròn.

Bài 91. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho họ đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ có phương trình : $x^2 + y^2 + (2 - m)x + 2my - 1 = 0$.

a) Chứng tỏ rằng họ đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định với mọi m.

b) Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn kẻ từ A(0; −1) khi m = −2.

§3. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG ELIP

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa elip

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 và độ dài không đổi $2a > F_1F_2$. Elip là tập hợp các điểm M trong mặt phẳng sao cho $F_1M + F_2M = 2a$.

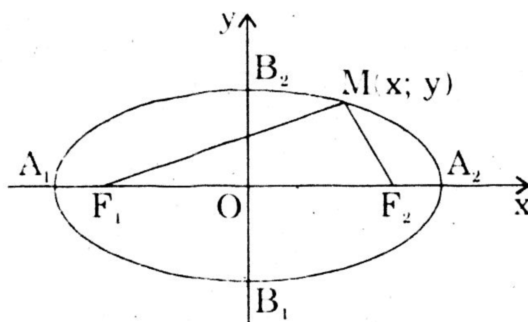
+ Các điểm F_1 và F_2 gọi là tiêu điểm của elip.

+ Độ dài $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của elip.

2. Phương trình chính tắc của elip

Cho elip (E) có các tiêu điểm F_1 và F_2.

Điểm M(x; y) thuộc elip $\Leftrightarrow$ $F_1M + F_2M = 2a$



Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$.

Lúc đó $M(x; y) \in (E) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (với $b^2 = a^2 - c^2$) gọi là phương trình chính tắc của elip.

3. Hình dạng của elip

- Elip có các trục đối xứng là hai trục tọa độ Ox và Oy, có tâm đối xứng là gốc O.
- Các điểm A_1, A_2, B_1 và B_2 gọi là các đỉnh của elip; đoạn thẳng A_1A_2 gọi là trục lớn; đoạn thẳng B_1B_2 gọi là trục nhỏ của elip.

4. Tâm sai của elip

Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là tâm sai của elip và được kí hiệu là e.

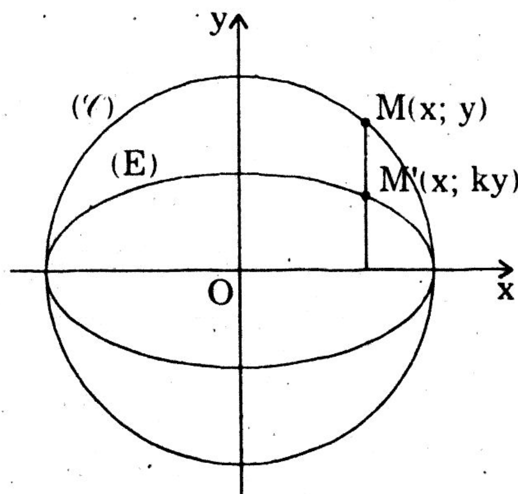
$$e = \frac{c}{a}$$

Ta có : $0 < e < 1$.

5. Elip và phép co của đường tròn

Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường tròn $(\mathscr{C}) : x^2 + y^2 = a^2$ và một số k $(0 < k < 1)$. Phép co về trục hoành với hệ số co k, ta có $M(x; y) \in (\mathscr{C}) \mapsto M'(x'; y') \in (E)$ (với $x' = x$; $y' = ky$) biến đường

tròn $(\mathscr{C}): x^2 + y^2 = a^2$ thành elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{(ka)^2} = 1$.



B. BÀI TẬP

Bài 92. Trong mặt phẳng tọa độ, cho elip (E) có phương trình

$$(E): \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1.$$

a) Xác định tọa độ các đỉnh A_1, A_2, B_1 và B_2 của elip.

b) Xác định tọa độ các tiêu điểm F_1, F_2 và tìm tâm sai của elip.

Bài 93. Trong mặt phẳng tọa độ cho elip (E) có phương trình :

$$9x^2 + 4y^2 = 36.$$

a) Xác định tọa độ các tiêu điểm F_1 và F_2 của elip.

b) Tính độ dài trục lớn, trục nhỏ và tìm tâm sai của elip.

Bài 94. Lập phương trình chính tắc của elip, biết :

a) Độ dài trục lớn là 10 và độ dài trục nhỏ là 8.

b) Độ dài trục nhỏ là 6 và tiêu cự bằng 4.

Bài 95. Trong mặt phẳng tọa độ, viết phương trình của elip (E) biết hai tiêu điểm $F_1(-1; 0)$ và $F_2(5; 0)$ và tâm sai $e = \dfrac{3}{5}$.

Bài 96. Trong mặt phẳng tọa độ cho elip (E) : $4x^2 + 9y^2 = 36$. Tìm giá trị của m để đường thẳng (d) : $y = x + m$ có điểm chung với (E).

Bài 97. Trong mặt phẳng tọa độ cho elip (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ và đường thẳng (d) : $mx + ny + p = 0$ $(m^2 + n^2 \neq 0)$.

Chứng minh rằng (E) và (d) tiếp xúc $\Leftrightarrow$ $(ma)^2 + (nb)^2 = p^2$.

§4. ĐƯỜNG HYPERBOL

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa đường hyperbol

Cho hai điểm cố định F_1 và F_2 có $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$.

Đường hyperbol là tập hợp các điểm M sao cho

$$|MF_1 - MF_2| = 2a \quad (0 < a < c)$$

Hai điểm F_1, F_2 gọi là các tiêu điểm của hyperbol.

$F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của hyperbol.

2. Phương trình chính tắc của hyperbol

Cho hyperbol (H) như định nghĩa trên, chọn hệ trục tọa độ Oxy có gốc là trung điểm của đoạn thẳng F_1F_2.

Trục Oy là đường trung trực của F_1F_2. Hai điểm F_1 và F_2 nằm trên trục Ox.

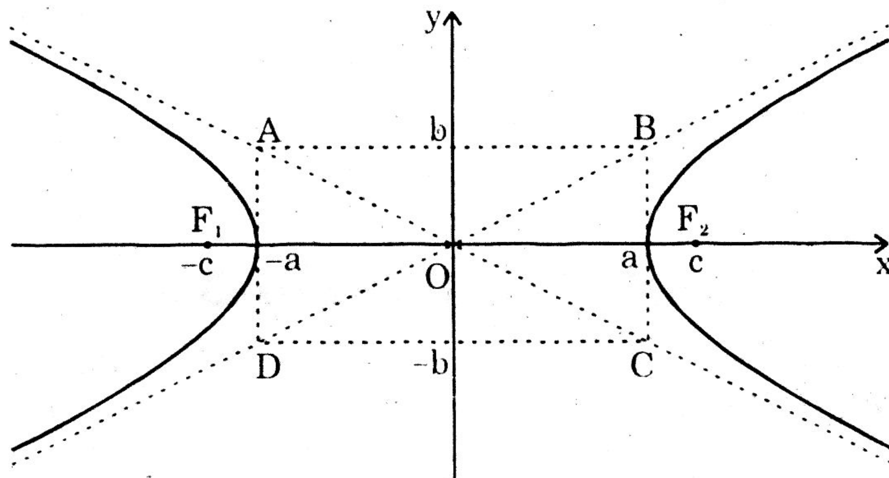
Giả sử $M(x; y) \in (H)$, ta có :

$$MF_1 = \left|a + \frac{cx}{a}\right| \quad \text{và} \quad MF_2 = \left|a - \frac{cx}{a}\right|$$

Các đoạn thẳng MF_1 và MF_2 gọi là bán kính qua tiêu của điểm M.

Phương trình của hyperbol (H) đối với hệ trục tọa độ đã chọn như trên có dạng : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ (với $a > 0$; $b > 0$ và $b^2 = c^2 - a^2$) gọi là phương trình chính tắc của hyperbol (H).

3. Hình dạng của hyperbol



- Trục Ox : trục thực (chứa hai tiêu điểm).

  Trục Oy : trục ảo.

- Hai giao điểm của (H) với trục Ox : hai đỉnh của hyperbol.
- Khoảng cách 2a giữa hai đỉnh gọi là độ dài trục thực; 2b : độ dài trục ảo.
- Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục thực gọi là tâm sai của hyperbol, kí hiệu e.

  Ta có : $e = \frac{c}{a} > 1$.

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. TÌM CÁC YẾU TỐ CỦA HYPERBOL KHI BIẾT PHƯƠNG TRÌNH CỦA HYPERBOL ĐÓ

I. Phương pháp

Chuyển phương trình của (H) về dạng chính tắc :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{hoặc} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1.$$

- Nếu (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ thì :

+ Trục thực nằm trên Ox có độ dài 2a chứa hai tiêu điểm $F_1(-c; 0)$ và $F_2(c; 0)$ với $c^2 = a^2 + b^2$.

+ Trục ảo nằm trên Oy có độ dài 2b.

+ Tâm sai $e = \frac{c}{a}$.

• Nếu (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ thì :

+ Trục thực nằm trên Oy có độ dài 2b chứa hai tiêu điểm $F_1(0; -c)$ và $F_2(0; c)$ với $c^2 = a^2 + b^2$.

+ Trục ảo nằm trên Ox có độ dài 2a.

+ Tâm sai $e = \frac{c}{b}$.

II. Bài tập

Bài 98. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hyperbol (H) : $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$. Tìm độ dài trục thực, trục ảo, tiêu điểm, tâm sai và các đường tiệm cận của (H).

Bài 99. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hyperbol (H) : $x^2 - 9y^2 = 9$.

a) Tìm độ dài trục thực, trục ảo, tiêu điểm, tâm sai.

b) Viết phương trình các đường tiệm cận.

Dạng 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH CỦA HYPERBOL KHI BIẾT CÁC YẾU TỐ

I. Phương pháp

Phương trình cần lập có dạng : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Dựa vào các yếu tố đã cho để tìm a, b.

II. Bài tập

Bài 100. Trong mặt phẳng tọa độ, lập phương trình chính tắc của

hyperbol (H), biết trục thực là trục Ox có độ dài 6, phương trình hai tiệm cận là $y = \pm\frac{2}{3}$.

Bài 101. Trong mặt phẳng tọa độ, lập phương trình chính tắc của hyperbol (H) trong các trường hợp sau :

a) Nửa trục ảo bằng 3, tiêu cự bằng 10.

b) Tâm sai $e = \sqrt{10}$ và hyperbol đi qua điểm $M(\sqrt{10}; 3)$.

Dạng 3. QUAN HỆ GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ HYPERBOL

I. Phương pháp

Cho hyperbol (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a > 0; b > 0)$

và đường thẳng (Δ) : $Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$.

Xét hệ phương trình : $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \\ Ax + By + C = 0 \end{cases}$

Số giao điểm của (H) và (Δ) chính là số nghiệm của hệ phương trình.

Chú ý : Đường thẳng (Δ) tiếp xúc (H) ⇔ $a^2A^2 - b^2B^2 = C^2$.

II. Bài tập

Bài 102. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hyperbol (H) : $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1$ và đường thẳng (Δ) : $x - y + m = 0$. Chứng minh rằng (Δ) luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt M và N thuộc hai nhánh khác nhau của (H).

Bài 103. Trong mặt phẳng tọa độ, cho hyperbol (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Viết phương trình đường thẳng (Δ) đi qua $M(2; -1)$ và là tiếp tuyến của (H).

§5. ĐƯỜNG PARABOL

A. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Định nghĩa đường parabol

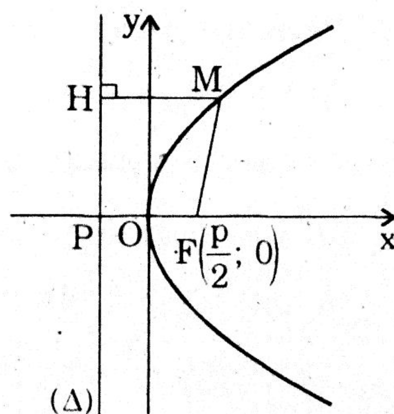
- Cho điểm F cố định và đường thẳng (Δ) cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M cách đều F và (Δ) được gọi là parabol (P).
- F gọi là tiêu điểm, (Δ) : đường chuẩn.
- Khoảng cách từ F đến (Δ) gọi là tham số tiêu của (P).

2. Phương trình chính tắc của parabol

Cho parabol (P) với tiêu điểm F và đường chuẩn (Δ).

Kẻ FP ⊥ (Δ) với P ∈ (Δ). Đặt FP = p.

Chọn hệ trục tọa độ Oxy sao cho O là trung điểm FP và F nằm trên tia Ox.



Ta có : $P\left(\frac{-p}{2};0\right)$ và $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, và phương trình của đường thẳng (Δ) : $x + \frac{p}{2} = 0$.

Điểm M(x; y) ∈ (P) ⇔ MF = MH

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|$$

$\Leftrightarrow \quad y^2 = 2px \quad (p > 0)$ gọi là phương trình chính tắc của (P).

B. CÁC DẠNG BÀI TẬP

Dạng 1. TÌM CÁC YẾU TỐ CỦA PARABOL KHI BIẾT PHƯƠNG TRÌNH CỦA PARABOL ĐÓ

I. Phương pháp

Chuyển phương trình của (P) về dạng :

$$y^2 = \pm 2px \text{ hoặc } x^2 = \pm 2py \text{ với } p > 0.$$

II. Bài tập

Bài 104. Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol (P) : $y^2 = 6x$. Xác định tiêu điểm F và viết phương trình đường chuẩn của (P).

Bài 105. Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol (P) : $y = -\frac{1}{3}(x^2 - 2)$.

Tìm tọa độ tiêu điểm của parabol.

Bài 106. Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol (P) : $y^2 = x$.

a) Xác định tham số tiêu.

b) Tìm tọa độ tiêu điểm.

c) Viết phương trình đường chuẩn.

Dạng 2. LẬP PHƯƠNG TRÌNH CỦA PARABOL

I. Phương pháp

- Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$ ($p > 0$). Ta cần tìm tham số tiêu p.
- Khi biết tiêu điểm F và đường chuẩn (Δ) ta dùng định nghĩa parabol để lập phương trình.

II. Bài tập

Bài 107. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) biết :

a) (P) có tiêu điểm F(3; 0).

b) (P) có tham số tiêu $p = \frac{1}{3}$.

c) (P) đi qua điểm M(1; –1).

Bài 108. Lập phương trình chính tắc của parabol (P) biết :

a) (P) nhận đường thẳng (Δ) : $x = -2$ làm đường chuẩn.

b) Một dây cung của (P) vuông góc với trục Ox có độ dài bằng 8 và khoảng cách từ đỉnh O của (P) đến dây cung bằng 1.

Bài 109. Lập phương trình parabol (P) biết parabol có tiêu điểm $F(2; 1)$ và đường chuẩn $(\Delta) : x + y + 1 = 0$.

Dạng 3. QUAN HỆ GIỮA PARABOL VỚI ĐƯỜNG THẲNG

I. Phương pháp

Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol $(P) : y^2 = 2px$ $(p > 0)$ và đường thẳng $(\Delta) : Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$.

Xét hệ phương trình : $\begin{cases} y^2 = 2px \\ Ax + By + C = 0. \end{cases}$

Số giao điểm của (Δ) và (P) chính là số nghiệm của hệ phương trình.

Chú ý : (Δ) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow$ $B^2p = 2AC$.

II. Bài tập

Bài 110. Trong mặt phẳng tọa độ, lập phương trình đường thẳng (Δ) cùng phương với đường thẳng $(\Delta') : 2x - y = 0$ và cắt parabol $(P) : y = x^2 - 2x + 3$ tại hai điểm A và B sao cho $AB = 10$.

Bài 111. Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol $(P) : y = 2x^2$.

Viết phương trình đường thẳng chứa dây AB của (P) sao cho điểm $M\left(\frac{3}{4}; \frac{17}{4}\right)$ là trung điểm của AB.

Bài 112. Trong mặt phẳng tọa độ, cho đường thẳng $(\Delta) : 2x - 2my - 1 = 0$ và parabol $(P) : y^2 = 2x$.

Chứng minh rằng với mọi m, đường thẳng (Δ) luôn đi qua tiêu điểm của parabol và cắt parabol tại hai điểm phân biệt.

Bài 113. Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol $(P) : y^2 = 16x$.

Lập phương trình đường thẳng (d) tiếp xúc với (P) và (d) vuông góc với đường thẳng $(\Delta) : 3x - 2y + 6 = 0$.

Bài 114. Trong mặt phẳng tọa độ, cho parabol $y = x^2$ và điểm $M(0; 2)$. Tìm điểm N trên parabol thỏa mãn MN ngắn nhất.

Bài 115. Trong mặt phẳng tọa độ, cho $(P) : y^2 = 2x$.

a) Xác định tọa độ tiêu điểm F.

b) Một đường thẳng (Δ) đi qua F cắt (P) tại hai điểm M và N. Tính MN biết (Δ) song song với trục Oy.

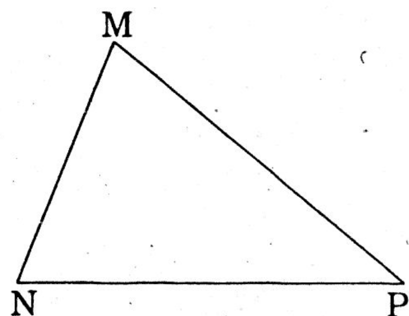
BÀI GIẢI

Chương 1. VECTƠ

Dạng 1. – Cách xác định vectơ – Phương và hướng của các vectơ – Vectơ bằng nhau, đối nhau

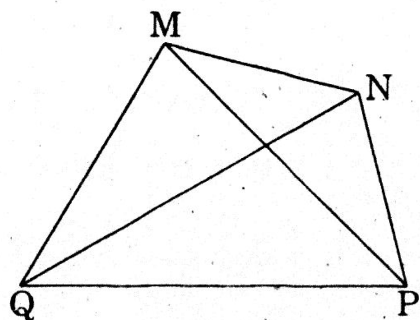
Bài 1. Với hai điểm A và B phân biệt, ta xác định được hai vectơ là $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{BA}$.

Bài 2. Mỗi cặp điểm M, N xác định hai cặp điểm có thứ tự (M; N) và (N; M). Do đó với mỗi cạnh của tam giác có hai vectơ khác vectơ – không là $\overrightarrow{MN}$ và $\overrightarrow{NM}$.



Vậy có tất cả 6 vectơ.

Bài 3. Mỗi cặp điểm M, N xác định hai vectơ khác vectơ – không; mỗi điểm M hoặc N xác định một vectơ – không.



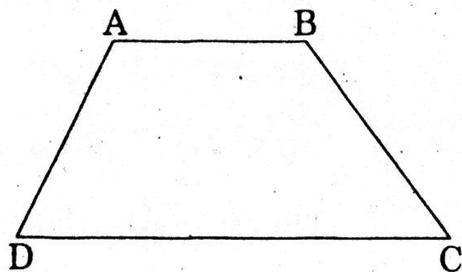
Vậy có tất cả 16 vectơ.

Bài 4.

a) Ta có : AB // CD (tính chất hình thang).

Mặt khác B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng chứa cạnh bên AD.

Vì vậy vectơ $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{DC}$.



b) Ta có : AB // CD (tính chất hình thang).

Hai đỉnh B và D nằm về hai phía đối với đường thẳng chứa

đường chéo AC của hình thang.

Vì vậy vectơ $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{CD}$.

Bài 5.

a) Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên :

- $\overrightarrow{MA}$ và $\overrightarrow{MB}$ là hai vectơ ngược hướng.
- $|\overrightarrow{MA}| = |\overrightarrow{MB}|$



Suy ra : $\overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{MB}$.

b) Vì M là trung điểm của đoạn thẳng AB nên :

- $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{MB}$ cùng hướng.
- $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{MB}|$

Suy ra : $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$.

Bài 6.

a) Vì hình thoi có các cạnh bằng nhau nên $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$.

b) Vì ABCD là hình thoi nên vectơ $\overrightarrow{AB}$ ngược hướng với vectơ $\overrightarrow{CD}$ và $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{CD}|$.

Suy ra : $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.

Bài 7.

* So sánh $\overrightarrow{HA}$ và $\overrightarrow{CB'}$.

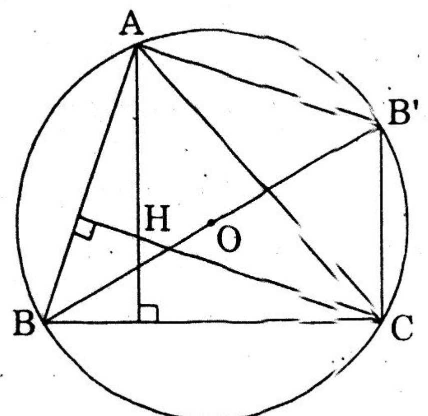
Ta có : $\widehat{B'CB} = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

Suy ra : $B'C \perp BC$

Mặt khác : $AH \perp BC$ (giả thiết)

Do đó : AH // B'C

Tương tự ta cũng có AB' và CH song song với nhau, vì cùng vuông góc với AB.



Vậy tứ giác AB'CH là hình bình hành.

Theo tính chất hình bình hành ta có HA = CB', lại có vectơ $\vec{HA}$ cùng hướng với vectơ $\vec{CB'}$ nên $\vec{HA} = \vec{CB'}$.

So sánh $\vec{AB'}$ và $\vec{HC}$.

Theo trên ta có $\vec{AB'} = \vec{HC}$.

Dạng 2. – Cách dựng tổng của hai hoặc nhiều vectơ

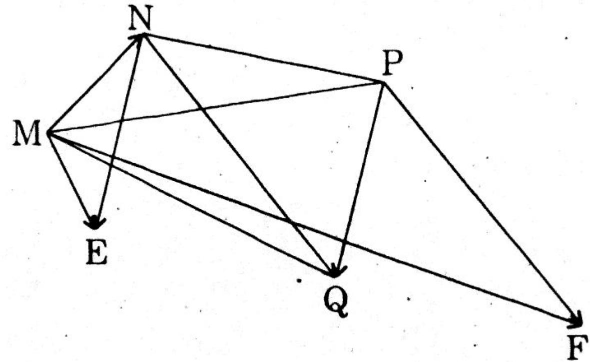
– Giá trị lớn nhất, nhỏ nhất về độ dài

Bài 8

a) Từ N ta dựng $\vec{NE} = \vec{PQ}$

Lúc đó :

$\vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{MN} + \vec{NE} = \vec{ME}$.



b) Từ P dựng $\vec{PF} = \vec{NQ}$

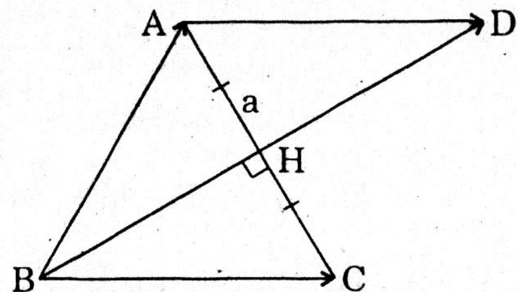
Lúc đó :

$\vec{MP} + \vec{NQ} = \vec{MP} + \vec{PF} = \vec{MF}$.

Bài 9

a) Dựng vectơ $\vec{AD} = \vec{BC}$

Ta có : $\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AD} = \vec{BD}$.



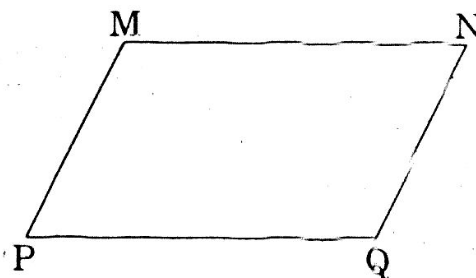
b) Gọi H là trung điểm BC. Vì ΔABC đều nên đường trung tuyến BH cũng chính là đường cao.

Ta có : $BH = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

$$|\vec{BA} + \vec{BC}| = |\vec{BD}| = 2|\vec{BH}| = 2.\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$

(Do tứ giác ABCD là hình bình hành).

Bài 10. Do $\vec{MN} = \vec{PQ}$ nên $\vec{MN}$ cùng hướng với $\vec{PQ}$ và $|\vec{MN}| = |\vec{PQ}|$.



Suy ra MN // PQ và MN = PQ.

Suy ra tứ giác MNQP là hình bình hành.

Suy ra MP // NQ và MP = NQ.

Suy ra $\vec{MP}$ cùng hướng với $\vec{NQ}$ và $|\vec{MP}| = |\vec{NQ}|$.

Suy ra $\vec{MP} = \vec{NQ}$.

Bài 11. Theo quy tắc ba điểm ta có :

$$\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DA} = \vec{AA} = \vec{0}.$$

Bài 12.

- Dựng hình bình hành IAKB, lúc đó $\vec{IK} = \vec{IA} + \vec{IB}$.

  Gọi M là giao điểm của hai đường chéo của hình bình hành IAKB. Ta có M là trung điểm của IK.

  Điểm I cần dựng thỏa mãn điều kiện $\vec{IK} + \vec{IC} = \vec{0}$.

  Đẳng thức này chứng tỏ I là trung điểm của đoạn thẳng KC

  Vậy I, M thuộc đoạn thẳng KC. Nghĩa là I thuộc trung tuyến CM và thỏa mãn điều kiện IC = 2IM. Chứng tỏ I là trọng tâm của ΔABC.

  Điểm I phải dựng là trọng tâm của ΔABC.

- Ta chứng minh điểm I cần dựng là duy nhất và trùng với trọng tâm của ΔABC.

  Thật vậy, giả sử có một cách dựng khác được điểm I' thỏa mãn điều kiện bài toán. Lúc đó ta suy ra :

$$\vec{I'A} + \vec{I'B} + \vec{I'C} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \quad (\vec{I'I} + \vec{I'I} + \vec{I'I}) + (\vec{I'A} + \vec{I'B} + \vec{I'C}) = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad \vec{I'I} + \vec{I'I} + \vec{I'I} = \vec{0}$

Từ một điểm O ta dựng $\vec{I'I} + \vec{I'I} + \vec{I'I} = \vec{OM}$

Theo quy tắc cộng : $\vec{OM} = 3\vec{I'I}$

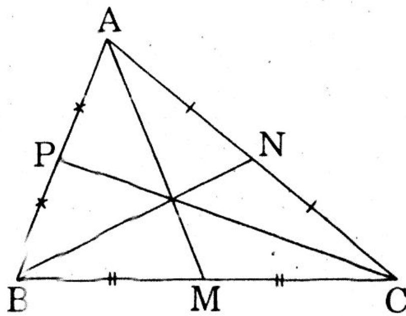
Vì $\vec{OM} = \vec{0}$ nên $\vec{I'I} = \vec{0}$.

Vậy I' và I trùng nhau.

Bài 13. Chứng minh : $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{0}$

Ta có : $\vec{AM} + \vec{BN} + \vec{CP} = \vec{AB} + \vec{BM} + \vec{BC} + \vec{CN} + \vec{CA} + \vec{AP}$

$= (\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CA}) + (\vec{BM} + \vec{CN} + \vec{AP})$



$= \vec{0} + 2\vec{BC} + 2\vec{CA} + 2\vec{AB}$

$= 2(\vec{BC} + \vec{CA} + \vec{AB})$

$= 2\vec{BB}$

$= 2.\vec{0}$

$= \vec{0}$.

Bài 14. Từ điểm A ta dựng vectơ $\vec{AB} = \vec{a}$; $\vec{BC} = \vec{b}$.

Lúc đó : $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Theo tính chất đường gấp khúc AB + BC ≥ AC

$\Rightarrow \quad |\vec{a}| + |\vec{b}| \geq |\vec{a} + \vec{b}|$

Đẳng thức xảy ra ⇔ B nằm giữa A và C.

Dạng 3. Hiệu hai vectơ

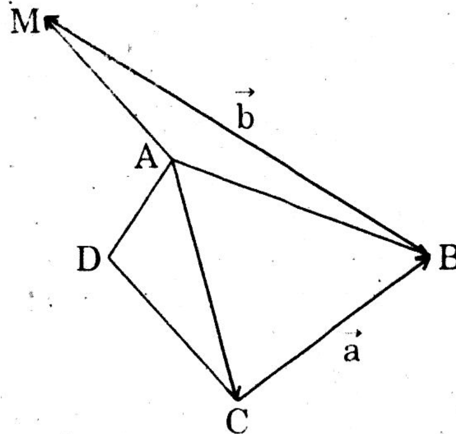
Bài 15. Ta có : $\vec{MN} - \vec{MQ} = \vec{QN}$ (quy tắc hiệu hai vectơ)

$\vec{PN} - \vec{PQ} = \vec{QN}$ (quy tắc hiệu hai vectơ)

$\Rightarrow \quad \vec{MN} - \vec{MQ} = \vec{PN} - \vec{PQ}$

$\Rightarrow \quad \vec{MN} + \vec{PQ} = \vec{PN} + \vec{MQ}.$

Bài 16.



- $\vec{a} = \vec{AB} - \vec{AC} = \vec{CB}$ (quy tắc hiệu hai vectơ)
- $\vec{b} = \vec{AB} - \vec{CD} = \vec{AB} - \vec{AM} = \vec{MB}$

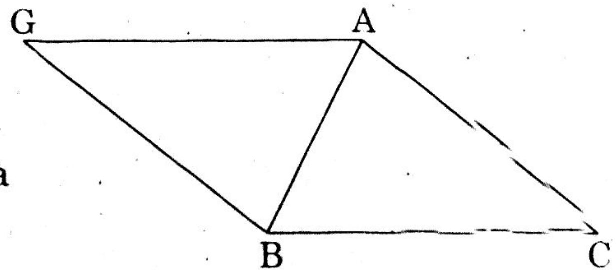
Cách dựng : Dựng vectơ $\vec{AM} = \vec{CD}$ (hình vẽ).

Bài 17. *Phân tích :* Giả sử có điểm G thỏa mãn

$$\vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$$

$\Leftrightarrow \quad \vec{GA} + \vec{CB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad \vec{AG} = \vec{CB}$



Suy ra G là đỉnh thứ tư của hình bình hành ACBG.

Cách dựng :

Dựng hình bình hành ACBG. Điểm G là điểm cần dựng

Chứng minh : Ta chứng minh điểm G cần dựng là duy nhất.

Thật vậy, nếu có điểm G' thỏa mãn điều kiện trên thì

$$\vec{G'G} + \vec{GA} + \vec{G'G} + \vec{GB} - \vec{G'G} - \vec{GC} = \vec{0}$$

$\Rightarrow \quad \vec{G'G} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad G' \equiv G.$

Bài 18. Từ điểm A ta dựng $\vec{AB} = \vec{a}$, $\vec{AC} = \vec{b}$.

Lúc đó : $\vec{AB} - \vec{AC} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{CB}$.

Ta có : $CB = |\vec{a} - \vec{b}|$, $AB = |\vec{a}|$, $AC = |\vec{b}|$.

Theo hệ quả bất đẳng thức tam giác :

$$AB - AC \le BC \quad \Rightarrow \quad \left||\vec{a}| - |\vec{b}|\right| \le |\vec{a} - \vec{b}|.$$

Bài 19.

- Ta có : $\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \left(\vec{OD} - \vec{OA}\right) + \left(\vec{OE} - \vec{OB}\right) + \left(\vec{OF} - \vec{OC}\right)$

$$= \left(\vec{OE} - \vec{OA}\right) + \left(\vec{OF} - \vec{OB}\right) + \left(\vec{OD} - \vec{OC}\right)$$

$$= \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} \qquad (1)$$

- Mặt khác :

$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \left(\vec{OD} - \vec{OA}\right) + \left(\vec{OE} - \vec{OB}\right) + \left(\vec{OF} - \vec{OC}\right)$$

$$= \left(\vec{OF} - \vec{OA}\right) + \left(\vec{OD} - \vec{OB}\right) + \left(\vec{OE} - \vec{OC}\right)$$

$$= \vec{AF} + \vec{BD} + \vec{CE} \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra :

$$\vec{AD} + \vec{BE} + \vec{CF} = \vec{AE} + \vec{BF} + \vec{CD} = \vec{AF} + \vec{BD} + \vec{CE}.$$

Bài 20. Ta có : $\vec{QM} - \vec{QN} + \vec{QP} = \vec{NM} + \vec{QP}$

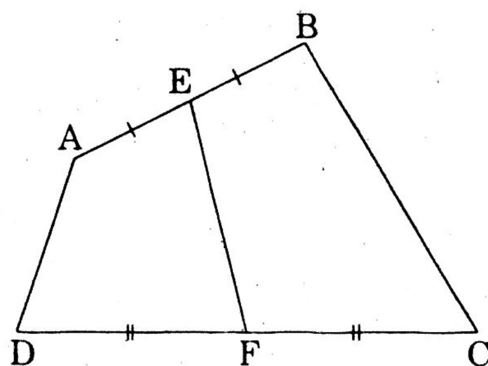
Vì MNPQ là hình bình hành nên $\vec{NM} = \vec{PQ}$.

Do đó : $\vec{NM} + \vec{QP} = \vec{PQ} + \vec{QP} = \vec{PP} = \vec{0}$.

Vậy $\vec{QM} - \vec{QN} + \vec{QP} = \vec{0}$.

Dạng 4. Tích của một vectơ với một số

Bài 21. Chứng minh : $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC} = 2\vec{EF}$



Theo quy tắc ba điểm ta có :

- $\vec{AC} + \vec{BD} = \left(\vec{AE} + \vec{EF} + \vec{FC}\right) + \left(\vec{BE} + \vec{EF} + \vec{FD}\right)$

$$= 2\vec{EF} + \left(\vec{AE} + \vec{BE}\right) + \left(\vec{FC} + \vec{FD}\right)$$

$$= 2\vec{EF} + \vec{0} + \vec{0} = 2\vec{EF} \quad (1)$$

- $\vec{AD} + \vec{BC} = \left(\vec{AE} + \vec{EF} + \vec{FD}\right) + \left(\vec{BE} + \vec{EF} + \vec{FC}\right)$

$$= 2\vec{EF} + \left(\vec{AE} + \vec{BE}\right) + \left(\vec{FD} + \vec{FC}\right)$$

$$= 2\vec{EF} + \vec{0} + \vec{0} = 2\vec{EF} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $\vec{AC} + \vec{BD} = \vec{AD} + \vec{BC} = 2\vec{EF}$.

Bài 22.

a) Gọi AM là trung tuyến xuất phát từ đỉnh A của ΔABC; G là trọng tâm của ΔABC.

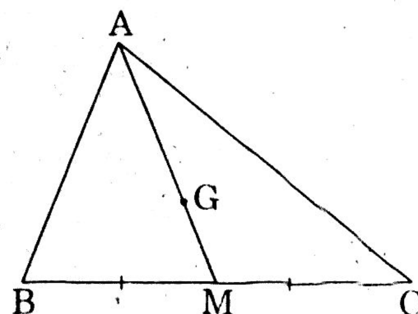
Khi đó : $\vec{GA} = -2\vec{GM}$

Vì M là trung điểm của BC nên

$$2\vec{GM} = \vec{GB} + \vec{GC}$$

Suy ra $\vec{GA} = -\left(\vec{GB} + \vec{GC}\right)$

Suy ra $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.



b) Với N là một điểm bất kì. Chứng minh $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = 3\vec{NG}$

Vì G là trọng tâm của ΔABC nên

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0} \text{ (theo chứng minh trên).}$$

Suy ra $\left(\vec{NA} - \vec{NG}\right) + \left(\vec{NB} - \vec{NG}\right) + \left(\vec{NC} - \vec{NG}\right) = \vec{0}$

Suy ra $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} - 3\vec{NG} = \vec{0}$

Suy ra $\vec{NA} + \vec{NB} + \vec{NC} = 3\vec{NG}$.

Bài 23. $3\vec{MA} + 4\vec{MB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $3\vec{MA} + 4\left(\vec{MA} + \vec{AB}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $7\vec{MA} + 4\vec{AB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $\vec{AM} = \frac{4}{7}\vec{AB}$.

Bài 24. Theo quy tắc ba điểm ta có :

$$\vec{a} = \vec{KA} + \vec{KB} - 2\vec{KC} = \left(\vec{KC} + \vec{CA}\right) + \left(\vec{KC} + \vec{CB}\right) - 2\vec{KC}$$

$= \vec{CA} + \vec{CB}$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm K.

Bài 25. Ta chọn điểm K sao cho $\vec{KM} + 2\vec{KN} = \vec{0}$.

Khi đó : $\vec{KM} + 2\left(\vec{KM} + \vec{MN}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ $-3\vec{KM} = 2\vec{MN}$

$\Leftrightarrow$ $3\vec{MK} = 2\vec{MN}$ $\Leftrightarrow$ $\vec{MK} = \frac{2}{3}\vec{MN}$

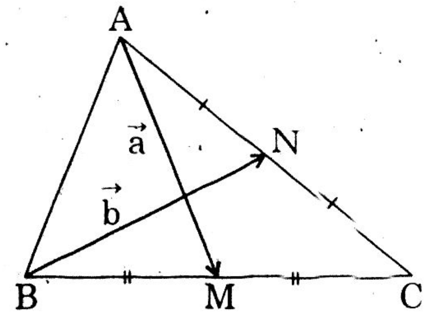
Hệ thức này chứng tỏ điểm K cố định và duy nhất.

Từ điều kiện đã cho ta có : $\vec{AM} + 2\vec{AN} = 3\vec{AK}$

Suy ra $\left|\vec{AM} + 2\vec{AN}\right| = 3AK$

Điểm A cần tìm là chân đường vuông góc kẻ từ K xuống đường thẳng a.

Bài 26.



a) Ta có : $\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB}$

$\Rightarrow \quad \vec{AB} = \vec{AM} + \vec{NB} - \vec{NM}$

$\Rightarrow \quad \vec{AB} = \vec{AM} + \vec{NB} - \dfrac{1}{2}\vec{AB}$

(do M, N lần lượt là trung điểm của BC và AC)

$\Rightarrow \quad \dfrac{3}{2}\vec{AB} = \vec{a} - \vec{b}$

$\Rightarrow \quad \vec{AB} = \dfrac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}).$

b) $\vec{BC} = \vec{BN} + \vec{NC} = \vec{BN} + \vec{MC} - \vec{MN} = \vec{BN} + \dfrac{1}{2}\vec{BC} + \dfrac{1}{2}\vec{AB}$

$\Rightarrow \quad \dfrac{1}{2}\vec{BC} = \vec{BN} + \dfrac{1}{2}\vec{AB} = \vec{b} + \dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}) = \dfrac{1}{3}\vec{a} - \dfrac{2}{3}\vec{b}$

$\Rightarrow \quad \vec{BC} = \dfrac{2}{3}\vec{a} - \dfrac{4}{3}\vec{b}.$

c) $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC} = \dfrac{2}{3}(\vec{a} - \vec{b}) + \left(\dfrac{2}{3}\vec{a} - \dfrac{4}{3}\vec{b}\right) = \dfrac{4}{3}\vec{a} - 2\vec{b}.$

Bài 27.

a) Vì $3\vec{MB} + 4\vec{MC} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{BM} = \dfrac{4}{3}\vec{MC}$

Ta có : $\vec{AM} = \vec{AB} + \vec{BM} = \vec{AB} + \dfrac{4}{3}\vec{MC}$

$\Rightarrow \quad \vec{AM} = \vec{AB} + \dfrac{4}{3}\left(\vec{MA} + \vec{AC}\right)$

$\Rightarrow \quad \vec{AM} - \dfrac{4}{3}\vec{MA} = \vec{AB} + \dfrac{4}{3}\vec{AC}$

$\Rightarrow \quad \vec{AM} + \dfrac{4}{3}\vec{AM} = \vec{AB} + \dfrac{4}{3}\vec{AC}$

$$\Rightarrow \quad \frac{7}{3}\vec{AM} = \vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{AM} = \frac{3}{7}\vec{AB} + \frac{4}{7}\vec{AC}$$

Tương tự : $\vec{AN} = -2\vec{AC}$; $\vec{AP} = \frac{1}{3}\vec{AB}$.

b) • $\vec{MN} = \vec{AN} - \vec{AM} = -2\vec{AC} - \frac{3}{7}\vec{AB} - \frac{4}{7}\vec{AC}$

$$= -\frac{18}{7}\vec{AC} - \frac{3}{7}\vec{AB}$$

• $\vec{MP} = \vec{AP} - \vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AB} - \frac{3}{7}\vec{AB} - \frac{4}{7}\vec{AC}$

$$= -\frac{2}{21}\vec{AB} - \frac{4}{7}\vec{AC}.$$

Nhận xét : $\vec{MN} = \frac{9}{2}\vec{MP}$, suy ra M, N, P thẳng hàng.

Dạng 5. Hệ trục tọa độ

Bài 28.

a) Đúng b) Đúng c) Đúng c) Sai.

Bài 29. $\vec{a} = (3; 4)$, $\vec{b} = \left(\frac{1}{2}; -3\right)$, $\vec{c} = (-2; 3)$, $\vec{d} = (-3; -5)$.

Bài 30.

a) $\vec{a} + \vec{b} = (1 - 3; 2 + 4) = (-2; 6)$.

b) $\vec{a} - \vec{b} = (1 + 3; 2 - 4) = (4; -2)$.

c) Ta có : $\vec{a} = (1; 2) \Rightarrow 2\vec{a} = (2; 4)$

$\vec{b} = (-3; 4) \Rightarrow 3\vec{b} = (-9; 12)$

Do đó : $2\vec{a} - 3\vec{b} = (11; -8)$.

Bài 31. Ta có : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (3; 6)$

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A) = (-2; -4)$

Suy ra $\overrightarrow{AB} = \frac{-3}{2}\overrightarrow{AC}$.

Do đó $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương. Vậy ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 32. Ta có : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A) = (2; 1)$

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A; y_C - y_A) = (m + 3; 2m)$

Vì A, B, C thẳng hàng nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương nên

$$\begin{cases} m + 3 = 2k \\ 2m = k \end{cases} (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow m + 3 = 2.2m$$

$$\Leftrightarrow m = 1$$

Vậy m = 1 thì ba điểm A, B, C thẳng hàng.

Bài 33. Ta có : $\vec{a} = (-1; 2) \Rightarrow 3\vec{a} = (-3; 6)$

$\vec{b} = (2; 3) \Rightarrow 2\vec{b} = (4; 6)$

$\vec{c} = (4; -1) \Rightarrow 5\vec{c} = (20; -5)$

a) $\vec{u} = \vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = (-17; 3)$.

b) $\vec{v} = 3\vec{a} - \vec{b} + 5\vec{c} = (15; -2)$.

Bài 34. Ta có : $\vec{a} = (2; -3) \Rightarrow m\vec{a} = (2m; -3m)$

$\vec{b} = (3; 4) \Rightarrow n\vec{b} = (3n; 4n)$

$\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b} = (5; -2)$.

Suy ra $\begin{cases} 2m + 3n = 5 \\ -3m + 4n = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = \frac{26}{17} \\ n = \frac{11}{17} \end{cases}$

Vậy $\vec{c} = \frac{26}{17}\vec{a} + \frac{11}{17}\vec{b}$.

Bài 35.

a) Gọi $G(x_G; y_G)$ là trọng tâm của tam giác ABC.

Ta có : $$x_C = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = \frac{-2 - 1 + 2}{3} = \frac{-1}{3}$$

$$y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{3 + 2 + 1}{3} = 2$$

Vậy $G\left(\frac{-1}{3}; 2\right)$.

b) Gọi tọa độ của điểm D là $(x_D; y_D)$.

Vì C là trọng tâm của ΔABD nên ta có :

$$x_C = \frac{x_A + x_B + x_D}{3}$$

$$\Rightarrow \quad x_D = 3x_C - x_A - x_B = 3.2 + 2 + 1 = 9$$

$$y_D = \frac{y_A + y_B + y_D}{3}$$

$$\Rightarrow \quad y_D = 3y_C - y_A - y_B = 3.1 - 3 - 2 = -2$$

Vậy D(9; –2).

c) Gọi $E(x_E; y_E)$ là đỉnh thứ tư của hình bình hành ABCE.

Ta có : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$

Suy ra : $$\begin{cases} x_E - x_A = x_C - x_B \\ y_E - y_A = y_C - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E + 2 = 2 + 1 \\ y_E - 3 = 1 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E = 1 \\ y_E = 2 \end{cases}$$

Vậy E(1; 2).

Chương 2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

Dạng 1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì (từ 0° đến 180°)

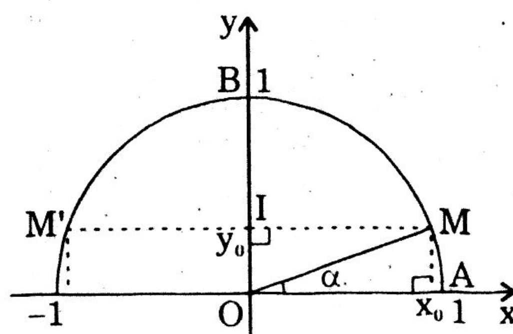
Bài 36.

a) sinα và cosα khác dấu ⇔ $90^\circ < \alpha < 180^\circ$.

b) sinα và cosα cùng dấu ⇔ $0^\circ < \alpha < 90^\circ$.

Bài 37.

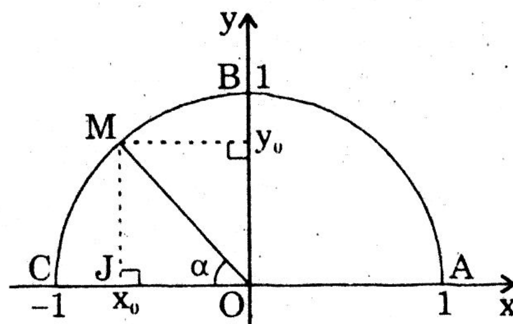
a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$



– Chia đoạn OB làm 3 phần bằng nhau, lấy điểm I trên OB sao cho $OI = \frac{1}{3}OB$.

– Qua I kẻ đường thẳng song song với trục Ox cắt nửa đường tròn đơn vị tại hai điểm M và M'. Hai điểm M và M' là hai điểm cần tìm thỏa mãn $\sin\alpha = \frac{1}{3}$.

b) $\cos\alpha = \frac{-2}{3}$



– Chia đoạn OC thành 3 phần bằng nhau, lấy điểm J trên OC sao cho $OJ = \frac{2}{3}OC$.

– Qua J kẻ đường thẳng song song với trục Oy cắt nửa đường tròn đơn vị tại điểm M. Điểm M là điểm cần tìm thỏa mãn $\cos\alpha = \frac{-2}{3}$.

Bài 38.

a) $a\sin 0^\circ + b\cos 0^\circ + c\tan 0^\circ = a.0 + b.1 + c.0$

$= b.$

b) $a\sin 30^\circ + b\cos 150^\circ + c\tan 135^\circ$

$= a.\frac{1}{2} + b\cos(180^\circ - 30^\circ) + c\tan(180^\circ - 45^\circ)$

$= \frac{a}{2} - b\cos 30^\circ - c\tan 45^\circ$

$= \frac{a}{2} - \frac{b\sqrt{3}}{2} - c.$

Bài 39.

a) $\cos 25^\circ + \sin 25^\circ + \cos 155^\circ - \sin 155^\circ$

$= -\cos 155^\circ + \sin 155^\circ + \cos 155^\circ - \sin 155^\circ$

$= 0.$

b) $\tan 45^\circ + \tan 135^\circ + \cot 45^\circ + \cot 135^\circ$

$= \tan 45^\circ - \tan 45^\circ + \cot 45^\circ - \cot 45^\circ$

$= 0.$

Bài 40. Vì $\tan\alpha = 2$ nên $\cos\alpha > 0$; $\sin\alpha > 0$.

Ta có : $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha} = \frac{1}{1+4} = \frac{1}{5}$

$\Rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

Suy ra $\sin\alpha = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$.

- $\cot\alpha.\tan\alpha = 1 \Rightarrow \cot\alpha = \frac{1}{\tan\alpha} = \frac{1}{2}$.

Bài 41. Ta có : $\sin\alpha + \cos\alpha = a \Rightarrow \sin\alpha = a - \cos\alpha$

Mặt khác : $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow (a - \cos\alpha)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow a^2 - 2a\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 1$

$\Rightarrow 2\cos^2\alpha - 2a\cos\alpha + a^2 - 1 = 0$

Suy ra $\cos\alpha$ là nghiệm của phương trình :

$$2x^2 - 2ax + a^2 - 1 = 0$$

$$\Delta' = a^2 - 2(a^2 - 1) = 2 - a^2$$

Để phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \Delta' \geq 0 \Leftrightarrow 2 - a^2 \geq 0$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2} + a\right)\left(\sqrt{2} - a\right) \geq 0$

$\Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq a \leq \sqrt{2}$

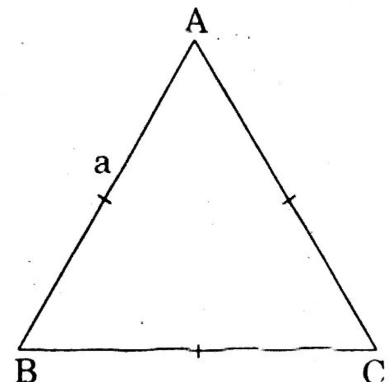
$\Leftrightarrow |a| \leq \sqrt{2}$.

Dạng 2. Tích vô hướng của hai vectơ

Bài 42.

a) Ta có : $\vec{AB}.\vec{AC} = |\vec{AB}|.|\vec{AC}|.\cos\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right)$

$= a.a.\cos 60^\circ = a^2.\frac{1}{2} = \frac{a^2}{2}$.



b) $\vec{AC}.\vec{CB} = |\vec{AC}|.|\vec{CB}|.\cos\left(\vec{AC}, \vec{CB}\right)$

$= a.a.\cos 120^\circ = \frac{-a^2}{2}$.

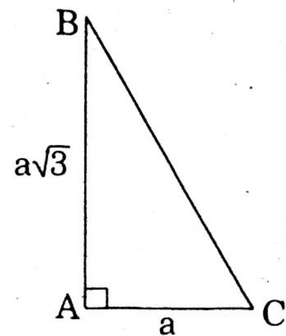
c) $\vec{CB}.\vec{AB} = |\vec{CB}|.|\vec{AB}|.\cos(\vec{CB}, \vec{AB})$

$$= a.a.\cos 60^\circ = \frac{a^2}{2}.$$

Bài 43. Theo định lí Pitago đối với ΔABC vuông tại A, ta có :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 3a^2 + a^2 = 4a^2$$

$$\Rightarrow \quad BC = 2a.$$



a) $\vec{AB}.\vec{AC} = |\vec{AB}|.|\vec{AC}|.\cos(\vec{AB}, \vec{AC})$

$$= a\sqrt{3}.a.\cos 90^\circ$$

$$= a^2\sqrt{3}.0 = 0.$$

b) $\vec{AC}.\vec{CB} = |\vec{AC}|.|\vec{CB}|.\cos(\vec{AC}, \vec{CB})$

$$= a.2a.\cos 120^\circ = -a^2.$$

c) $\vec{BA}.\vec{BC} = |\vec{BA}|.|\vec{BC}|.\cos(\vec{BA}, \vec{BC})$

$$= a\sqrt{3}.2a.\cos 30^\circ$$

$$= 2\sqrt{3}.a^2.\frac{\sqrt{3}}{2} = 3a^2.$$

Bài 44. Ta có : $(\vec{a}.\vec{b})^2 = \left[|\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a}, \vec{b})\right]^2$

$$= |\vec{a}|^2.|\vec{b}|^2.\cos^2(\vec{a}, \vec{b})$$

$$= \vec{a}^2.\vec{b}^2.\cos^2(\vec{a}, \vec{b})$$

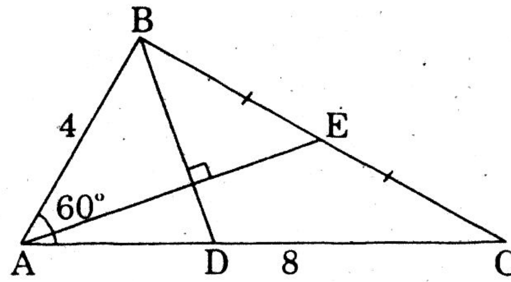
Do đó để $(\vec{a}.\vec{b})^2 = \vec{a}^2.\vec{b}^2 \Leftrightarrow \cos^2(\vec{a}, \vec{b}) = 1$

$$\Leftrightarrow \cos(\vec{a}, \vec{b}) = \pm 1$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = 0^\circ \text{ hoặc } 180^\circ.$$

Nghĩa là $\vec{a}$ và $\vec{b}$ phải cùng phương.

Bài 45.



Ta có : $\vec{BD} = \vec{BA} + \vec{AD} = -\vec{AB} + k\vec{AC}$

$$\vec{AE} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right)$$

$BD \perp AE \Leftrightarrow \left(\vec{AB} + \vec{AC}\right).\left(-\vec{AB} + k\vec{AC}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow -\vec{AB}^2 + k\vec{AB}.\vec{AC} - \vec{AB}.\vec{AC} + k\vec{AC}^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow k\left(\vec{AB}.\vec{AC} + \vec{AC}^2\right) = \vec{AB}^2 + \vec{AB}.\vec{AC}$$

$$\Leftrightarrow k = \frac{\vec{AB}^2 + \vec{AB}.\vec{AC}}{\vec{AC}^2 + \vec{AB}.\vec{AC}} = \frac{16+16}{64+16} = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}.$$

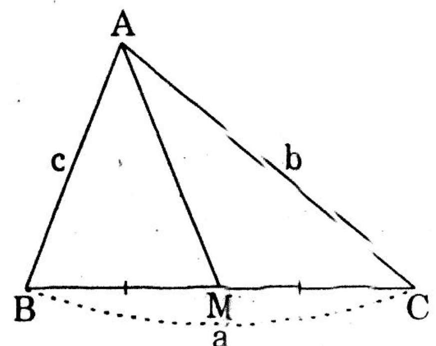
Bài 46.

a) Tính AM.

Ta có : $\vec{AB}.\vec{AC} = \frac{1}{2}\left[\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - \left(\vec{AB} - \vec{AC}\right)^2\right]$

$$= \frac{1}{2}\left(\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 - \vec{CB}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2)$$



Mặt khác : $\vec{AM} = \frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right)$

$$\Rightarrow AM^2 = \vec{AM}^2 = \frac{1}{4}\left(\vec{AB} + \vec{AC}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}\left(\vec{AB}^2 + \vec{AC}^2 + 2\vec{AB}.\vec{AC}\right)$$

$$AM^2 = \frac{1}{4}\left[c^2 + b^2 + 2.\frac{1}{2}(c^2 + b^2 - a^2)\right]$$

$$= \frac{1}{4}(c^2 + b^2 + c^2 + b^2 - a^2)$$

$$= \frac{1}{4}(2c^2 + 2b^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow \quad AM = \frac{1}{2}\sqrt{2c^2 + 2b^2 - a^2}.$$

b) Tính AD.

Tam giác ABC có AD là phân giác trong tại đỉnh A.

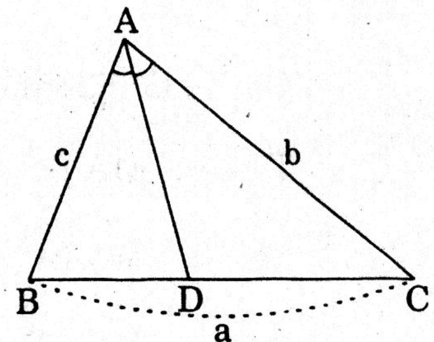
Theo tính chất đường phân giác, ta có :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}$$

Suy ra : $DB = \frac{c}{b}.DC$

Vì $\overrightarrow{DB}$ và $\overrightarrow{DC}$ ngược hướng nên $\overrightarrow{DB} = \frac{-c}{b}.\overrightarrow{DC}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \frac{-c}{b}\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}\right)$$



$$\Rightarrow \quad b.\overrightarrow{AB} - b.\overrightarrow{AD} = -c.\overrightarrow{AC} + c.\overrightarrow{AD}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AD} = \frac{b.\overrightarrow{AB} + c.\overrightarrow{AC}}{b + c}$$

$$\Rightarrow \quad AD^2 = \overrightarrow{AD}^2 = \frac{\left(b.\overrightarrow{AB} + c.\overrightarrow{AC}\right)^2}{(b + c)^2}$$

$$= \frac{b^2.\overrightarrow{AB}^2 + c^2.\overrightarrow{AC}^2 + 2bc.\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{(b + c)^2}$$

$$= \frac{b^2c^2 + b^2c^2 + bc(b^2 + c^2 - a^2)}{(b + c)^2}.$$

$$\Rightarrow \quad AD^2 = \frac{bc(2bc + b^2 + c^2 - a^2)}{(b + c)^2}$$

$$= \frac{bc[(b + c)^2 - a^2]}{(b + c)^2}$$

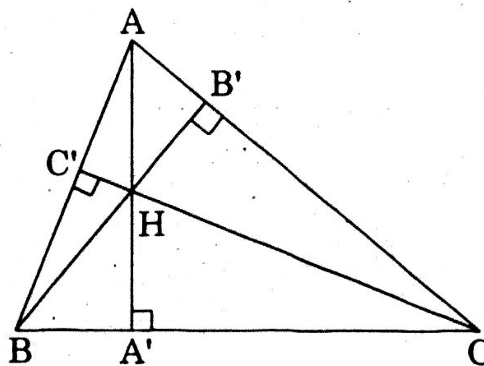
$$= \frac{bc(a + b + c)(b + c - a)}{(b + c)^2} \qquad (*)$$

Đặt $\frac{a + b + c}{2} = p$ (nửa chu vi ΔABC) và thay vào (*), ta được :

$$AD^2 = \frac{4bcp(p - a)}{(b + c)^2}$$

$$\Rightarrow \quad AD = \frac{2}{b + c}\sqrt{bcp(p - a)}.$$

Bài 47.



Gọi H là giao điểm của hai đường cao AA' và BB' của ΔABC.

Ta có : $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$

Mà $\overrightarrow{HA}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{HB}.\overrightarrow{AC} = 0$

Suy ra $\overrightarrow{HC}.\overrightarrow{AB} = 0$

Suy ra $HC \perp AB$.

Vậy H thuộc đường cao CC' của ΔABC, nghĩa là ba đường cao trong một tam giác đồng quy tại một điểm.

Bài 48. Theo quy tắc trung điểm, ta có :

$$\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CP} =$$

$$= \overrightarrow{BC}.\left(\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{2}\right) + \overrightarrow{CA}.\left(\frac{\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}}{2}\right) + \overrightarrow{AB}.\left(\frac{\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CA}\right) + \overrightarrow{CA}.\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}.\vec{0} + \overrightarrow{BC}.\vec{0} + \overrightarrow{CA}.\vec{0}\right)$$

$$= 0.$$

Bài 49. Ta có :

$$4\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KH} = 4\overrightarrow{AK}.\overrightarrow{HK}$$

$$= 2\overrightarrow{AK}.2\overrightarrow{HK}$$

$$= \left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HC}$$

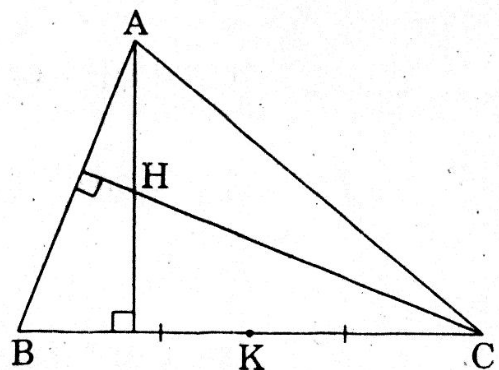
$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HC} \quad (\text{do } \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{HC} = 0;\ \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{HB} = 0)$$

$$= \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{AC}.\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{BC}\right)$$

$$= \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BC}$$

$$= \overrightarrow{BC}.\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)$$

$$= \overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}^2 = BC^2$$



Vậy : $\overrightarrow{KA}.\overrightarrow{KH} = \frac{1}{4}BC^2$.

Bài 50. Ta có : $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\left(\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{AC}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CN} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad AN \perp AB$$

Vậy tập hợp những điểm N thỏa mãn $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AB}$ là đường thẳng đi qua C và vuông góc với AB.

Bài 51.

a) $\vec{a} = (2; 3)$, $\vec{b} = (-1; 4)$

Suy ra : $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

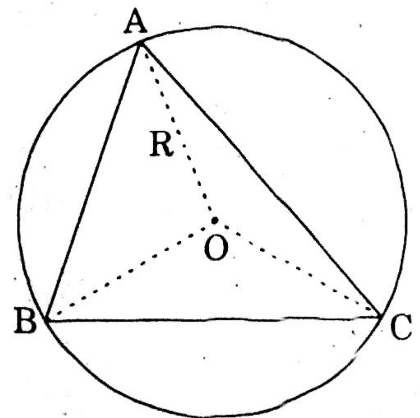
$= 2.(-1) + 3.4 = 10.$

b) $\vec{a} = (-3; -7)$, $\vec{b} = (5; 2)$

Suy ra : $\vec{a}.\vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2$

$= (-3).5 + (-7).2 = -29.$

Bài 52. Gọi O và R lần lượt là tâm và bán kính của đường tròn ngoại tiếp ΔABC.



Ta có : $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OA}|.|\overrightarrow{OB}|.\cos\widehat{AOB}$

$= R^2.\cos 2C$

Tương tự : $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} = R^2.\cos 2A$

$\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA} = R^2.\cos 2B$

Mặt khác :

$$\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)^2 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 + \overrightarrow{OC}^2 + 2\left(\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OC}.\overrightarrow{OA}\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad R^2 + R^2 + R^2 + 2(R^2.\cos 2C + R^2.\cos 2A + R^2.\cos 2B) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3R^2 + 2R^2.(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq \frac{-3R^2}{2R^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \cos 2A + \cos 2B + \cos 2C \geq -\frac{3}{2}.$$

Dạng 3. Hệ thức lượng trong tam giác và giải tam giác

Bài 53.

a) Ta có : $\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

Do đó : $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos A$

$= 5^2 + 7^2 - 2.5.7.\frac{3}{5} = 32$

$\Rightarrow BC = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ (cm).

b) $S_{ABC} = \frac{1}{2}.AC.AB.\sin A = \frac{1}{2}.7.5.\frac{4}{5} = 14$ (cm^2)

Mặt khác : $S_{ABC} = \frac{1}{2}BC.AH$

$\Rightarrow AH = \frac{2.S_{ABC}}{BC} = \frac{2.14}{4\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$ (cm)

- Ta có : $S_{ABC} = \frac{abc}{4R}$ (với BC = a; AC = b; AB = c)

$\Rightarrow R = \frac{abc}{4.S_{ABC}} = \frac{4\sqrt{2}.7.5}{4.14} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ (cm).

Bài 54.

a) Gọi p là nửa chu vi của ΔABC và BC = a; AC = b; AB = c.

Ta có : $S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{7+8+6}{2} = \frac{21}{2}$ (cm)

Suy ra : $S_{ABC} = \sqrt{\frac{21}{2}\left(\frac{21}{2} - 7\right)\left(\frac{21}{2} - 8\right)\left(\frac{21}{2} - 6\right)}$

$= \sqrt{\frac{21}{2}.\frac{7}{2}.\frac{5}{2}.\frac{9}{2}} = \sqrt{\frac{6615}{16}} = \frac{21\sqrt{15}}{4}$ (cm^2)

Mặt khác $S_{ABC} = \frac{1}{2}AC.BH$

$$\Rightarrow \quad BH = \frac{2.S_{ABC}}{AC} = \frac{2.21\sqrt{15}}{8.4} = \frac{21\sqrt{15}}{16} \text{(cm)}.$$

b) Ta có : $AM^2 = m_a^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4} = \frac{2(64 + 36) - 49}{4} = \frac{151}{4}$

Suy ra $AM = \sqrt{\frac{151}{4}} = \frac{\sqrt{151}}{2} \text{(cm)}.$

Bài 55. Ta có : $S_{ABC} = \frac{1}{2}a.h_a = \frac{1}{2}b.h_b = \frac{1}{2}c.h_c$

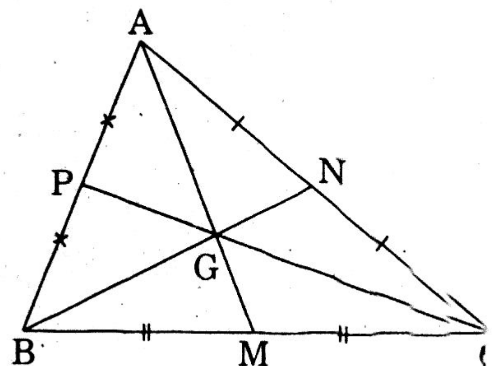
Suy ra $a = \frac{2.S_{ABC}}{h_a}$; $b = \frac{2.S_{ABC}}{h_b}$; $c = \frac{2.S_{ABC}}{h_c}$

Vì b + c = 2a nên :

$$\frac{2S_{ABC}}{h_b} + \frac{2S_{ABC}}{h_c} = \frac{2.2S_{ABC}}{h_a}$$

Suy ra : $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{h_a}$.

Bài 56. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm các cạnh BC, AC, AB củ ΔABC. Ta có :



$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$\Rightarrow \quad AM^2 = \frac{1}{2}\left(AB^2 + AC^2 - \frac{BC^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad AM^2 = \frac{1}{2}\left(c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \quad GA^2 = \frac{4}{9}AM^2 = \frac{2}{9}\left(c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2}\right)$$

Tương tự : $GB^2 = \frac{2}{9}\left(a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2}\right)$

$GC^2 = \frac{2}{9}\left(a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right)$

Suy ra :

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{2}{9}\left[c^2 + b^2 - \frac{a^2}{2} + a^2 + c^2 - \frac{b^2}{2} + a^2 + b^2 - \frac{c^2}{2}\right]$$

$$= \frac{2}{9}\left(\frac{3}{2}a^2 + \frac{3}{2}b^2 + \frac{3}{2}c^2\right)$$

$$= \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

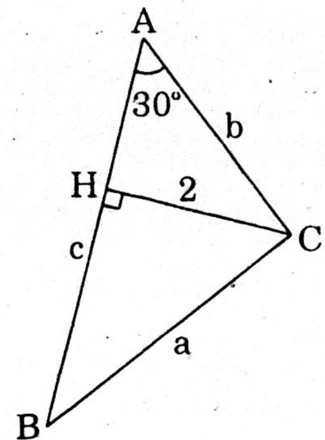
Vậy $a^2 + b^2 + c^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$.

Bài 57. Ta có : $\sin A = \frac{CH}{AC}$

$$\Rightarrow \quad AC = b = \frac{CH}{\sin A} = \frac{2}{\sin 30^\circ} = 4\,(cm)$$

Vì $a - b = 1 \Rightarrow a = b + 1 = 4 + 1 = 5$ (cm)

Mặt khác : $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$ (định lí sin)



$$\Rightarrow \quad \frac{5}{\sin 30^\circ} = \frac{4}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \quad 10 = \frac{4}{\sin B}$$

$$\Rightarrow \quad \sin B = \frac{2}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \cos B = \sqrt{1 - \sin^2 B} = \sqrt{1 - \frac{4}{25}}$$

$$\Rightarrow \quad \cos B = \frac{\sqrt{21}}{5}.$$

Bài 58. Trong ΔABC đặt $AB = c$, $AC = b$ và $BC = a$.

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \dfrac{a^2}{2} = 4 + \dfrac{a^2}{2} \text{ (vì } m_a = \sqrt{2}\text{cm)} & (1) \\ a^2 + c^2 = 2m_b^2 + \dfrac{b^2}{2} = 6 + \dfrac{b^2}{2} \text{ (vì } m_b = \sqrt{3}\text{cm)} & (2) \\ a^2 + b^2 = 2m_c^2 + \dfrac{c^2}{2} = 2 + \dfrac{c^2}{2} \text{ (vì } m_c = 1\text{cm)} & (3) \end{cases}$$

Cộng vế theo vế của ba phương trình của hệ ta được :

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = 12 + \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2) = 12$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 + b^2 + c^2 = 8 \qquad (4)$$

Từ (4) và (1) ta có : $8 - a^2 = 4 + \dfrac{a^2}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad a^2 = \frac{8}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad a = \sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \text{ (cm)}$$

Từ (4) và (2) ta có : $8 - b^2 = 6 + \dfrac{b^2}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad b^2 = \frac{4}{3}$$

$$\Leftrightarrow \quad b = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \text{ (cm)}$$

Từ (4) và (3) ta có : $8 - c^2 = 2 + \dfrac{c^2}{2}$

$$\Leftrightarrow \quad c^2 = 4 \qquad \Leftrightarrow \quad c = 2 \text{ (cm)}$$

Vậy $a = \frac{2\sqrt{6}}{3}$cm; $b = \frac{2\sqrt{3}}{3}$cm và $c = 2$cm.

Bài 59. Ta có : $\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C$

$= 2\sin(A + B).\cos(A - B) + 2\sin C.\cos C$

$= 2\sin(180^\circ - C).\cos(A - B) + 2\sin C.\cos C$

$= 2\sin C.\cos(A - B) + 2\sin C.\cos C$

$= 2\sin C.[\cos(A - B) + \cos C]$

$= 2\sin C.[\cos(A - B) - \cos(A + B)]$

$= 2\sin C.2\sin A.\sin B$

$= 4\sin A.\sin B.\sin C.$

Bài 60. Ta có : $S = \frac{abc}{4R}$

Mà $a = 2R\sin A$; $b = 2R\sin B$; $c = 2R\sin C$

Nên $S = \frac{2R\sin A.2R\sin B.2R\sin C}{4R}$

$S = 2R^2.\sin A.\sin B.\sin C.$

Bài 61.

a) • $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

$= 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\cos 30^\circ$

$= 41 - 40.\frac{\sqrt{3}}{2} = 41 - 20\sqrt{3} \approx 6,3589$

$\Rightarrow$ $c = \sqrt{6,3589} \approx 2,52$ (cm).

• Theo định lí sin, ta có :

$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}$ $\Rightarrow$ $\sin A = \frac{a.\sin C}{c} = \frac{4.\sin 30^\circ}{2,52}$

$\Rightarrow$ $\sin A \approx 0,7937$

$\Rightarrow \quad \widehat{A} = 52^\circ$ 31 phút. Suy ra $\widehat{B} = 97^\circ$ 29 phút.

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$= 49 + 144 - 2.7.12.\cos 120^\circ$

$= 193 - 168.(-0,5) = 277$

$\Rightarrow \quad a = \sqrt{277} \approx 16,64$ (cm)

Theo định lí sin, ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \quad \Rightarrow \quad \sin B = \frac{b.\sin A}{a} = \frac{7.\sin 120^\circ}{16,64} \approx 0,3643$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{B} = 21^\circ \text{ 21 phút}$$

Do đó $\widehat{C} = 180^\circ - (\widehat{A} + \widehat{B}) = 180^\circ - 141^\circ$ 21 phút

$= 38^\circ$ 39 phút.

c) Ta có : $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{18^2 + 20^2 - 15^2}{2.18.20} = \dfrac{499}{720} \approx 0,6930$

$\Rightarrow \quad \widehat{A} \approx 46^\circ$.

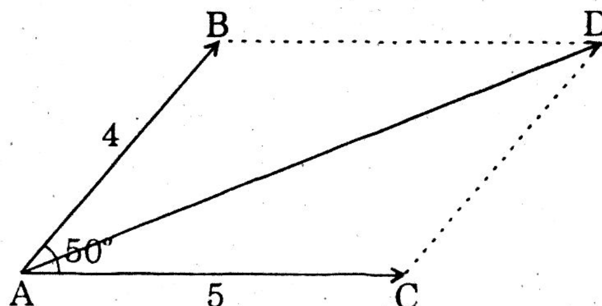
$\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{15^2 + 20^2 - 18^2}{2.15.20} = \dfrac{301}{600} \approx 0,5017$

$\Rightarrow \quad \widehat{B} \approx 60^\circ$.

Do đó : $\widehat{C} = 180^\circ - (46^\circ + 60^\circ) = 74^\circ$.

Bài 62. Ta có : $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

Suy ra $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$ và có $\widehat{ABD} = 180^\circ - 50^\circ = 130^\circ$



Theo định lí cosin, ta có :

$$AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB.BD.\cos 130^\circ$$

$$= 4^2 + 5^2 - 2.4.5.\cos 130^\circ$$

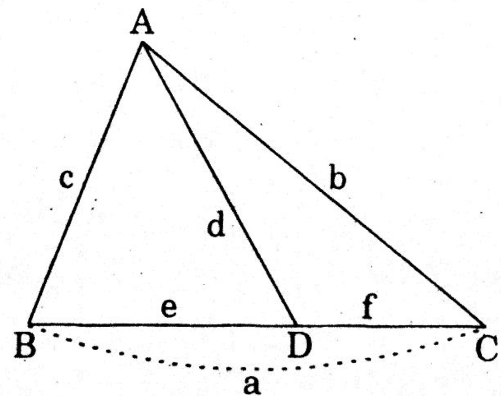
$$\approx 66,71$$

$$\Rightarrow \quad AD \approx 8,2$$

Vậy cường độ của lực tổng hợp là 8,2N.

Bài 63.

a) Chứng minh : $eb^2 + fc^2 = ad^2 + aef$



Ta có : $\cos\widehat{ADB} = \dfrac{e^2 + d^2 - c^2}{2e.d}$

$\cos\widehat{ADC} = \dfrac{f^2 + d^2 - b^2}{2fd}$

Mà $\widehat{ADB} + \widehat{ADC} = 180^\circ$ (kề bù)

Nên $\cos\widehat{ADB} = -\cos\widehat{ADC}$

Suy ra : $\dfrac{e^2 + d^2 - c^2}{2ed} = \dfrac{f^2 + d^2 - b^2}{2fd}$

$\Leftrightarrow \quad f.(e^2 + d^2 - c^2) = -e.(f^2 + d^2 - b^2)$

$\Leftrightarrow \quad fe^2 + fd^2 - fc^2 = -ef^2 - ed^2 - eb^2$

$\Leftrightarrow \quad eb^2 + fc^2 = fe^2 + fd^2 + ef^2 + ed^2$

$= ef.(e + f) + d^2.(e + f)$

$= efa + d^2a \quad$ (vì $e + f = a$)

Vậy $eb^2 + fc^2 = ad^2 + aef \quad (*)$.

b) Khi D là trung điểm của BC, ta có : $e = f = \dfrac{a}{2}$.

Thay vào (*), ta có : $\dfrac{a}{2}b^2 + \dfrac{a}{2}c^2 = ad^2 + a.\dfrac{a}{2}.\dfrac{a}{2}$

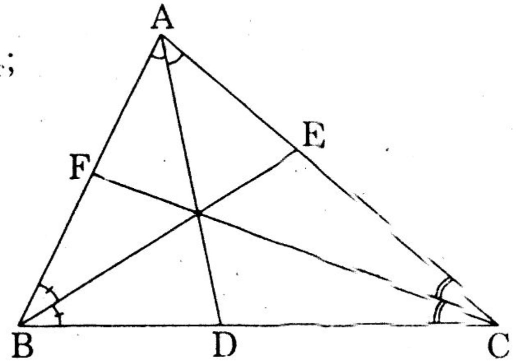
$\Leftrightarrow \quad 2b^2 + 2c^2 = 4d^2 + a^2$.

$\Leftrightarrow \quad d^2 = \dfrac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$.

Bài 64. Ta có : AB = c; AC = b; BC = a

Đặt $AD = l_a$; $BE = l_b$; $CF = l_c$;

BD = e; DC = f.



Theo tính chất đường phân giác, ta có :

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow \frac{DB}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{DB + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC}$$

$$DC = \frac{AC.BC}{AB + AC} \quad \text{hay} \quad f = \frac{b.a}{c + b}$$

Theo kết quả bài 63 (định lí Stewart), ta có :

$$eb^2 + fc^2 = a.AD^2 + aef$$

$$\Rightarrow \frac{ac}{b + c}.b^2 + \frac{ab}{b + c}.c^2 = a.l_a^2 + a.\frac{ac}{b + c}.\frac{ab}{b + c}$$

$$\Rightarrow \frac{acb^2}{b + c} + \frac{abc^2}{b + c} = al_a^2 + \frac{a^3bc}{(b + c)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{cb^2}{b + c} + \frac{bc^2}{b + c} = l_a^2 + \frac{a^2bc}{(b + c)^2}$$

$$\Rightarrow l_a^2 = \frac{cb^2(b + c)}{(b + c)^2} + \frac{bc^2(b + c)}{(b + c)^2} - \frac{a^2bc}{(b + c)^2}$$

$$\Rightarrow l_a^2 = \frac{bc[(b + c)^2 - a^2]}{(b + c)^2} = \frac{bc(b + c + a)(b + c - a)}{(b + c)^2}$$

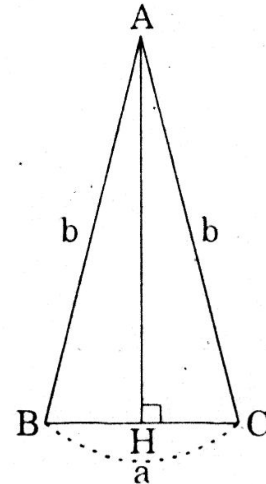
$$\Rightarrow l_a^2 = \frac{bc.4p(p - a)}{(b + c)^2} \quad \text{với } p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$\Rightarrow \quad l_a^2 = \frac{4bc.p(p-a)}{(b+c)^2}$$

Tương tự ta cũng có :

$$l_b^2 = \frac{4ac.p(p-b)}{(a+c)^2}; \qquad l_c^2 = \frac{4ab.p(p-c)}{(a+b)^2}.$$

Bài 65. Kẻ AH $\perp$ BC (H $\in$ BC)



Trong tam giác vuông AHB, ta có :

$$\sin\widehat{BAH} = \frac{BH}{AB}$$

$$\Rightarrow \quad \sin 10^\circ = \frac{\frac{a}{2}}{b} = \frac{a}{2b}$$

$$\Rightarrow \quad a = 2b.\sin 10^\circ \qquad (1)$$

Do đó : $a^3 + b^3 = (2b.\sin 10^\circ)^3 + b^3$

$= 8b^3.\sin^3 10^\circ + b^3$

$= 2b^3.\left(4\sin^3 10^\circ + \frac{1}{2}\right)$

$= 2b^3.(\sin^3 10^\circ + \sin 30^\circ)$

$= 2b^3.[4\sin^3 10^\circ + \sin(3.10^\circ)] \qquad (2)$

Mặt khác, ta có công thức :

$$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$

Suy ra $\sin(3.10^\circ) = 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ$

Thay vào (2) : $a^3 + b^3 = 2b^3.[4\sin^3 10^\circ + 3\sin 10^\circ - 4\sin^3 10^\circ]$

$= 2b^3.3\sin 10^\circ$

$= 3b^2.(2b.\sin 10^\circ)$

$= 3b^2.a \qquad$ (vì theo (1) : $a = 2b.\sin 10^\circ$)

Vậy : $a^3 + b^3 = 3ab^2$.

Chương 3. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Dạng 1. Lập phương trình tham số của đường thẳng

Bài 66. Vì Δ đi qua hai điểm A(–2; –3) và B(1; 6) nên có vectơ chỉ phương $\vec{AB} = (3; 9)$.

Phương trình tham số của Δ là : $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -3 + 9t \end{cases}$

Hệ số góc của Δ là : $k = \dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{9}{3} = 3$.

Bài 67. Đường thẳng Δ có phương trình tham số : $\begin{cases} x = -5 + 2t \\ y = 4 + 3t \end{cases}$

nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2; 3)$.

Vì $\vec{n} = (3; -2)$ nên ta có : $\vec{u}.\vec{n} = 2.3 + 3.(-2) = 0$

Vậy $\vec{u} \perp \vec{n}$.

Bài 68.

a) Vì đường thẳng Δ đi qua điểm A(2; 3) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; 2)$ nên phương trình tham số của đường thẳng là :

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t. \end{cases}$$

b) Vì đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 1)$ nên vectơ chỉ phương của đường thẳng Δ là $\vec{u} = (1; -3)$.

Mặt khác đường thẳng Δ đi qua điểm B(2; –3) nên phương trình tham số của đường thẳng Δ là : $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 - 3t. \end{cases}$

Bài 69.

a) Đường thẳng cần tìm song song với trục hoành nên có vectơ

chỉ phương $\vec{i} = (1; 0)$ và đi qua điểm A(1; 1) nên có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1. \end{cases}$

b) Đường thẳng cần tìm song song với trục tung nên có vectơ chỉ phương $\vec{j} = (0; 1)$ và đi qua điểm B(2; –1) nên có phương trình tham số là : $\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 + t. \end{cases}$

Dạng 2. – Lập phương trình tổng quát của đường thẳng
– Phương trình chính tắc của đường thẳng

Bài 70.

a) Đường thẳng Δ đi qua hai điểm A(1; 1) và B(2; –1) nên có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{AB} = (1; -2)$.

Suy ra vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\vec{n} = (2; 1)$.

Vậy đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là :

$$2(x - 1) + (y - 1) = 0 \Leftrightarrow 2x - 2 + y - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0.$$

b) Đường thẳng Δ đi qua điểm M(–1; 1) và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (6; 2)$ nên có vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (-2; 6)$.

Vậy đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là :

$$-2(x + 1) + 6(y - 1) = 0 \Leftrightarrow -2x - 2 + 6y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 6y + 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 3y + 4 = 0.$$

c) Đường thẳng Δ đi qua điểm N(1; –5) có hệ số góc k = –3 nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -3)$.

Suy ra đường thẳng Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3; 1)$.

Vậy đường thẳng Δ có phương trình tổng quát là :

$$3(x-1)+(y+5)=0 \Leftrightarrow 3x-3+y+5=0$$

$$\Leftrightarrow 3x+y+2=0.$$

Bài 71.

a) Vì đường thẳng Δ có phương trình tham số là : $\begin{cases} x=-3+5t \\ y=2-2t \end{cases}$

Suy ra phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là :

$$\frac{x+3}{5}=\frac{y-2}{-2}.$$

b) Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là :

$$-2(x+3)=5(y-2) \Leftrightarrow -2x-6=5y-10$$

$$\Leftrightarrow 2x+5y-4=0.$$

Bài 72. Đường cao cần tìm là đường thẳng đi qua A(1; 2) và nhận $\overrightarrow{BC}$ là một vectơ pháp tuyến.

Ta có : $\overrightarrow{BC}=(2;-1)$

Phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ A là :

$$2(x-1)-1(y-2)=0 \Leftrightarrow 2x-2-y+2=0$$

$$\Leftrightarrow 2x-y=0.$$

Bài 73. Ta nhận thấy đỉnh C(–4; –5) không thuộc hai đường cao đã cho. Không mất tính tổng quát, gọi H là trực tâm.

Giả sử đường cao AH : $5x+3y-4=0$

và đường cao BH : $3x+8y+13=0.$

Vì AH $\perp$ BC nên phương trình tổng quát đường thẳng BC là :

$$3(x+4)-5(y+5)=0 \Leftrightarrow 3x-5y-13=0$$

Vì BH $\perp$ AC nên phương trình tổng quát đường thẳng AC là :

$$8(x+4)-3(y+5)=0 \Leftrightarrow 8x-3y+17=0$$

• Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 5x + 3y - 4 = 0 \\ 8x - 3y + 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Suy ra A(−1; 3).

• Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 3x + 8y + 13 = 0 \\ 3x - 5y - 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ x = 1 \end{cases}$$

Suy ra B(1; −2).

Phương trình tổng quát đường thẳng AB có vectơ chỉ phương $\vec{AB} = (2; -5)$ và vectơ pháp tuyến là $\vec{n} = (5; 2)$ nên có phương trình là :

$$5(x + 1) + 2(y - 3) = 0 \Leftrightarrow 5x + 5 + 2y - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow 5x + 2y - 1 = 0$$

Vậy AB : $5x + 2y - 1 = 0$

BC : $3x - 5y - 13 = 0$

AC : $8x - 3y + 17 = 0$.

Bài 74. Gọi AH là đường cao và AM là đường trung tuyến của ΔABC.

Ta có : AH : $2x - 3y + 12 = 0$

AM : $2x + 3y = 0$

Tọa độ đỉnh A là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases}$$

Suy ra A(−3; 2).

Vì C(4; −2) nên phương trình tổng quát của cạnh AC là :

$$\frac{x - x_A}{y - y_A} = \frac{x_C - x_A}{y_C - y_A} \Leftrightarrow \frac{x + 3}{y - 2} = \frac{4 + 3}{-2 - 2} = \frac{7}{-4}$$

$\Leftrightarrow \quad -4(x + 3) = 7(y - 2) \quad \Leftrightarrow \quad -4x - 12 = 7y - 14$

$\Leftrightarrow \quad 4x + 7y - 2 = 0$

Do cạnh BC đi qua điểm C(4; −2) và vuông góc với AH nên phương trình tổng quát cua cạnh BC là :

$3(x - 4) + 2(y + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3x - 12 + 2y + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 3x + 2y - 8 = 0$

Mặt khác M là giao điểm của AM và BC nên tọa độ của M là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ 3x + 2y - 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x + 9y = 0 \\ 6x + 4y - 16 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{16}{5} \\ x = \dfrac{24}{5} \end{cases}$$

Suy ra $M\left(\dfrac{24}{5}; -\dfrac{16}{5}\right)$.

Vì M là trung điểm của BC nên :

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_B + x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_B + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 2x_M - x_C \\ y_B = 2y_M - y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = \dfrac{28}{5} \\ y_B = \dfrac{-22}{5} \end{cases}$$

Suy ra $B\left(\dfrac{28}{5}; -\dfrac{22}{5}\right)$.

Phương trình đường thẳng chứa cạnh AB là :

$$\frac{x - x_A}{y - y_A} = \frac{x_B - x_A}{y_B - y_A} \Leftrightarrow \frac{x + 3}{y - 2} = \frac{43}{-32}$$

$\Leftrightarrow \quad -32(x + 3) = 43(y - 2) \quad \Leftrightarrow \quad -32x - 96 = 43y - 86$

$\Leftrightarrow \quad 32x + 43y + 10 = 0$

Vậy AB : $32x + 43y + 10 = 0$

BC : $3x + 2y - 8 = 0$

AC : $4x + 7y - 2 = 0$.

Bài 75.

a) Đường thẳng Δ đi qua A(2; 3) và song song với MN nên nhận $\overrightarrow{MN} = (-3; -1)$ làm vectơ chỉ phương. Do đó vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ là $\vec{n} = (1; -3)$.

Phương trình tổng quát của đường thẳng Δ là :

$$(x - 2) - 3(y - 3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - 3y + 7 = 0.$$

b) Gọi $I(x_I; y_I)$ là trung điểm của đoạn thẳng MN.

Ta có : $$\begin{cases} x_I = \dfrac{x_M + x_N}{2} = \dfrac{3+0}{2} = \dfrac{3}{2} \\ y_I = \dfrac{y_M + y_N}{2} = \dfrac{0-1}{2} = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Suy ra $I\left(\dfrac{3}{2}; -\dfrac{1}{2}\right)$.

Gọi phương trình đường trung trực của đoạn thẳng MN là Δ'. Vì Δ' đi qua I và nhận vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{MN} = (-3; -1)$ nên phương trình tổng quát của đường thẳng Δ' là :

$$-3\left(x - \frac{3}{2}\right) - \left(y + \frac{1}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -3x + \frac{3}{2} - y - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -3x - y + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x + y - 1 = 0.$$

Bài 76. Vì A(–1; 2) không thuộc đường thẳng $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-2}$ nên phương trình đường thẳng chứa đường chéo BD là :

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y}{-2} \quad \Leftrightarrow \quad x + 1 = -y \quad \Leftrightarrow \quad x + y + 1 = 0$$

Vectơ chỉ phương của đường chéo BD là $\vec{u} = (2; -2)$.

Do đó phương trình đường chéo AC là :

$$2(x + 1) - 2(y - 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x - y + 3 = 0$$

Gọi I là giao điểm của hai đường chéo, thì tọa độ của I là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

Suy ra I(–2; 1).

Vì I là trung điểm AC nên $x_C = 2x_I - x_A = -3$

$$y_C = 2y_I - y_A = 0$$

Do đó C(–3; 0).

Mặt khác ABCD là hình vuông nên $IB = ID = IA$

$$\Rightarrow IB^2 = IA^2 \quad (*)$$

Vì B thuộc đường thẳng $\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y}{-2} = t$ (t là tham số)

$$\Rightarrow \frac{x_B + 1}{2} = \frac{y_B}{-2} = t$$

$$\Rightarrow x_B = -1 + 2t; \quad y_B = -2t$$

Từ (*) ta có :

$$(x_B - x_I)^2 + (y_B - y_I)^2 = (x_A - x_I)^2 + (y_A - y_I)^2$$

$$\Rightarrow (-1 + 2t + 2)^2 + (-2t - 1)^2 = (-1 + 2)^2 + (2 - 1)^2$$

$$\Rightarrow (2t + 1)^2 + (2t + 1)^2 = 2$$

$$\Rightarrow (2t + 1)^2 = 1$$

$$\Rightarrow 4t^2 + 4t = 0$$

$$\Rightarrow 4t(t + 1) = 0$$

$$\Rightarrow t = 0; \quad t = -1$$

Suy ra B(–1; 0) hoặc B(–3; 2)

- Nếu B(–1; 0) thì D(–3; 2)
- Nếu B(–3; 2) thì D(–1; 0).

Dạng 3. **Tìm khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng và góc tạo bởi giữa hai đường thẳng**

Bài 77.

a) Khoảng cách từ điểm M(1; 3) đến $\Delta_1 : 2x - 3y + 5 = 0$ là :

$$d(M, \Delta_1) = \frac{|2.1 - 3.3 + 5|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}.$$

b) Khoảng cách từ điểm N(–2; –3) đến đường thẳng Δ_2 là :

$$d(N, \Delta_2) = \frac{|3.(-2) + 4.(-3) + 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{17}{5}.$$

Bài 78. Bán kính của đường tròn là :

$$R = \frac{|2.1 + 3.2 - 15|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{13}}{13}.$$

Bài 79.

a) Thay tọa độ ba điểm A(–2; 0), B(3; 2) và C(2; –5) vào vế trái của đường thẳng $\Delta : x - 3y - 2 = 0$.

Ta có : $-2 - 2 = -4$; $3 - 3.2 - 2 = -5$; $2 + 15 - 2 = 15$

Suy ra hai điểm A và B nằm cùng phía đối với đường thẳng Δ còn C nằm về phía kia.

Vậy Δ cắt hai cạnh AC và BC của ΔABC.

b) Vì $P(x_P; y_P)$ nằm trên đường thẳng Δ nên ta có :

$$x_P - 3y_P - 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_P = 3y_P + 2$$

Suy ra tọa độ điểm P(3y + 2; y).

Ta có : $\overrightarrow{PA} = (-2 - 3y - 2; -y)$

$\overrightarrow{PB} = (3 - 3y - 2; 2 - y)$

$\overrightarrow{PC} = (2 - 3y - 2; -5 - y)$

$\Rightarrow \quad \vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = (-3 - 9y; -3 - 3y)$

Do đó $|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}| = \sqrt{(9y+3)^2 + (3y+3)^2}$

$$= \sqrt{9(3y+1)^2 + 9(y+1)^2}$$

$$= 3\sqrt{9y^2 + 6y + 1 + y^2 + 2y + 1}$$

$$= 3\sqrt{10y^2 + 8y + 2}$$

$$= 3\sqrt{10\left(y + \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{2}{5}}$$

$|\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC}|$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow \quad y + \frac{2}{5} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{-2}{5}$

Suy ra tọa độ của điểm $P\left(\frac{4}{5}; \frac{-2}{5}\right)$ cần tìm.

Bài 80. Ta có A(2; 0), B(4; 1) và C(1; 2).

a) Phương trình tổng quát đường thẳng AB là :

$$\frac{x-2}{y} = \frac{4-2}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x - 2y - 2 = 0$$

Phương trình tổng quát đường thẳng AC là :

$$\frac{x-2}{y} = \frac{1-2}{2-0} = \frac{-1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2x + y - 4 = 0$$

b) Phương trình các đường phân giác trong và ngoài của góc A :

$$\frac{x-2y-2}{\sqrt{1^2+2^2}} = \pm\frac{2x+y-4}{\sqrt{2^2+1^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x - 2y - 2 = 2x + y - 4 \\ x - 2y - 2 = -(2x + y - 4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x + 3y - 2 = 0 & (1) \\ 3x - y - 6 = 0 & (2) \end{cases}$$

Thay lần lượt tọa độ của B và C vào vế trái của phương trình (1) ta có :

$$4 + 3.1 - 2 = 5; \quad 1 + 3.2 - 2 = 5$$

Suy ra B và C nằm cùng phía đối với đường thẳng (1).

Vậy phương trình đường phân giác trong của góc A là :

$$3x - y - 6 = 0.$$

Bài 81. Ta có đường thẳng d : x = 0 đi qua A(0; 1) không phải là đường thẳng cần tìm, vì d không tạo với đường thẳng $\Delta : x + 2y + 3 = 0$ một góc 45^o.

Thật vậy : $\cos(d, \Delta) = \dfrac{|1 + 0|}{\sqrt{1}.\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}$

còn $\cos 45^o = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Suy ra : $\cos(d, \Delta) \neq \cos 45^o$.

- Gọi k là hệ số góc của đường thẳng d đi qua A(0; 1).

Phương trình của đường thẳng d là :

$$y = k(x - 0) + 1 \quad \Leftrightarrow \quad kx - y + 1 = 0$$

Vì d tạo với đường thẳng Δ một góc 45^o nên :

$$\cos(d, \Delta) = \cos 45^o \quad \Leftrightarrow \quad \frac{|k + (-1).2|}{\sqrt{k^2 + 1}.\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|k - 2|}{\sqrt{k^2 + 1}.\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2|k - 2| = \sqrt{10(k^2 + 1)}$$

$$\Leftrightarrow \quad 4(k^2 - 4k + 4) = 10(k^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad 6k^2 + 16k - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3k^2 + 8k - 3 = 0$$

$$\Delta' = 16 + 9 = 25 > 0$$

$$k_1 = \frac{-4 + 5}{3} = \frac{1}{3}; \quad k_2 = \frac{-4 - 5}{3} = -3$$

Vậy có hai đường thẳng d thỏa mãn đề bài là :

$$x - 3y + 3 = 0 \quad \text{và} \quad 3x + y - 1 = 0.$$

Bài 82. Đặt $f(x; y) = (m - 1)x + (m - 2)y + 2m - 1$

Ta có : $f(x_A; y_A) = (m - 1).1 + (m - 2).0 + 2m - 1 = 3m - 2$

$f(x_B; y_B) = (m - 1).2 + (m - 2).3 + 2m - 1 = 7m - 9$

Để Δ cắt AB $\Leftrightarrow f(x_A; y_A).f(x_B; y_B) \le 0$

$\Leftrightarrow (3m - 2)(7m - 9) \le 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3m - 2 \le 0; \quad 7m - 9 \ge 0 \\ 3m - 2 \ge 0; \quad 7m - 9 \le 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le \frac{2}{3}; m \ge \frac{9}{7} \text{ (loại)} \\ m \ge \frac{2}{3}; m \le \frac{9}{7} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \le m \le \frac{9}{7}.$$

§2. PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

Dạng 1. Phương trình đường tròn và cách nhận dạng phương trình đường tròn.

Bài 83. Gọi I(x; y) là tâm của đường tròn, ta có :

$$x = \frac{-3 + 3}{2} = 0; \qquad y = \frac{4 - 4}{2} = 0$$

Suy ra I(0; 0).

Bán kính $R = IA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

Phương trình đường tròn cần lập là : $x^2 + y^2 = 25$.

Bài 84.

a) $x^2 + y^2 - 4x - 4y - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) - 8 - 4 = 0$

$\Leftrightarrow \quad (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 12 = (2\sqrt{3})^2$

Vậy tâm của đường tròn là I(2; 2) và bán kính $R = 2\sqrt{3}$.

b) $16x^2 + 16y^2 - 8x + 16y - 11 = 0$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{1}{2}x + y - \frac{11}{16} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x^2 - 2x.\frac{1}{4} + \frac{1}{16}\right) + \left(y^2 + 2.y.\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{16} - \frac{1}{4} - \frac{11}{16} = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1$

Vậy tâm của đường tròn $I\left(\frac{1}{4}; \frac{-1}{2}\right)$ và bán kính R = 1.

Bài 85.

a) Với A(1; –2), B(1; 2) và C(5; 2) là tọa độ ba đỉnh A, B, C.

Gọi I(x; y) là tâm của đường tròn đi qua ba điểm A, B, C.

Suy ra IA = IB = IC $\Leftrightarrow \begin{cases} IA^2 = IB^2 \\ IA^2 = IC^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)^2 + (y+2)^2 = (x-1)^2 + (y-2)^2 \\ (x-1)^2 + (y+2)^2 = (x-5)^2 + (y-2)^2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 4y + 4 = -4y + 4 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = x^2 - 10x + 25 + y^2 - 4y + 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ -2x + 5 = -10x + 29 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Vậy I(3; 0).

Bán kính của đường tròn :

$$R = IA = \sqrt{(3-1)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$$

Vậy phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C là :

$$(x-3)^2 + y^2 = 8 \quad \text{hay} \quad x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0.$$

b) Bán kính của đường tròn là :

$$R = IM = \sqrt{(-1-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

Phương trình của đường tròn là :

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0.$$

c) Bán kính của đường tròn là :

$$R = d(I, \Delta) = \frac{|3 + 4.(-2) - 20|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{25}{\sqrt{5}} = 5\sqrt{5}$$

Phương trình của đường tròn là :

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 125$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 2x + 4y - 120 = 0.$$

Bài 86.

a) Phương trình đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm I(a; b) và bán kính R có dạng : $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

Vì $(\mathscr{C})$ tiếp xúc với hai trục tọa độ nên $|a| = |b| = R$.

Do đó phương trình $(\mathscr{C})$ trở thành :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = a^2.$$

Vì $M(2; -1) \in (\mathscr{C})$ nên : $(2-a)^2 + (-1-b)^2 = a^2$ (1)

- Với a = b thì (1) $\Leftrightarrow$ $(2-a)^2 + (-1-a)^2 = a^2$

$\Leftrightarrow$ $a^2 - 2a + 5 = 0$ phương trình vô nghiệm

- Với $a = -b$ thì (1) $\Leftrightarrow (2 - a)^2 + (-1 + a)^2 = a^2$

$$\Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1;\ a = 5$$

+ Khi $a = 1$ thì $b = -1$; $R = 1$: phương trình đường tròn là :

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

+ Khi $a = 5$ thì $b = -5$; $R = 5$: phương trình đường tròn là :

$$(x - 5)^2 + (y + 5)^2 = 25.$$

b) Phương trình đường tròn tiếp xúc với trục Ox và có tâm I(a; b) có dạng : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

Do đường tròn tiếp xúc với trục Ox nên $R = b$.

Suy ra phương trình đường tròn : $(x - a)^2 + (y - b)^2 = b^2$

Vì đường tròn đi qua hai điểm N(1; 4) và P(1; 1) nên :

$$\begin{cases}(1 - a)^2 + (4 - b)^2 = b^2 \\ (1 - a)^2 + (1 - b)^2 = b^2\end{cases}$$

Giải hệ phương trình ta tìm được :

$$a = -1;\ b = \frac{5}{2} \quad \text{hoặc} \quad a = 3;\ b = \frac{5}{2}.$$

Hai phương trình đường tròn cần tìm là :

$$(x + 1)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$(x - 3)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}.$$

Dạng 2. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Bài 87. Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm I(–1; 2) nên phương trình tiếp tuyến với đường tròn $(\mathscr{C})$ tại M(3; 5) là :

$$(3 + 1)(x - 3) + (5 - 2)(y - 5) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x - 12 + 3y - 15 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x + 3y - 27 = 0.$$

Bài 88. Phương trình đường tròn $x^2 + y^2 = 9$ nên có tâm $I(0; 0)$ và bán kính $R = 3$.

a) Tiếp tuyến với đường tròn có phương trình :

$$2x + y + c = 0 \quad (\text{với } c \neq -5)$$

Sử dụng điều kiện tiếp xúc, ta có :

$$\frac{|c|}{\sqrt{5}} = 3 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 3\sqrt{5}$$

Có 2 tiếp tuyến cần tìm song song với đường thẳng $2x + y - 5 = 0$ là :

$$2x + y + 3\sqrt{5} = 0 \quad \text{và} \quad 2x + y - 3\sqrt{5} = 0.$$

b) Vì tiếp tuyến cần tìm vuông góc với đường thẳng $3x + 2y - 5 = 0$ nên tiếp tuyến có dạng : $2x - 3y + c = 0$.

Suy ra : $\dfrac{|c|}{\sqrt{13}} = 3 \quad \Rightarrow \quad c = \pm 3\sqrt{13}$

Có hai tiếp tuyến cần tìm là :

$$2x - 3y + 3\sqrt{13} = 0 \quad \text{và} \quad 2x - 3y - 3\sqrt{13} = 0.$$

Bài 89. Đường tròn $(\mathscr{C})$ có tâm $I(-1; 1)$ và bán kính $R = 2$.

Khoảng cách từ điểm $I(-1; 1)$ đến đường thẳng Δ_m bằng :

$$\frac{|-1 - 1 + 2m + 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|2m + 1|}{\sqrt{2}}$$

- Δ cắt đường tròn $(\mathscr{C})$ $\Leftrightarrow \dfrac{|2m + 1|}{\sqrt{2}} < 2$

$$\Leftrightarrow \quad |2m + 1| < 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-2\sqrt{2} - 1}{2} < m < \frac{2\sqrt{2} - 1}{2}$$

- Δ tiếp xúc với đường tròn ($\mathscr{C}$) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{|2m+1|}{\sqrt{2}} = 2$

$$\Leftrightarrow \quad |2m+1| = 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} 2m+1 = 2\sqrt{2} \\ 2m+1 = -2\sqrt{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} m = \dfrac{2\sqrt{2}-1}{2} \\ m = \dfrac{-2\sqrt{2}-1}{2} \end{array}\right.$$

- Δ không cắt đường tròn ($\mathscr{C}$)

$$\Leftrightarrow \quad m > \frac{2\sqrt{2}-1}{2} \quad \text{hoặc} \quad m < \frac{-2\sqrt{2}-1}{2}.$$

Bài 90. Ta có : $x^2 + y^2 + 2mx - 4my + 2m + 3 = 0$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 + 2mx - 2.2my + 2m + 3 = 0$$

Với I(a; b) là tâm của đường tròn thì :

$$a = -m; \quad b = 2m; \quad c = 2m + 3.$$

Điều kiện để ($\mathscr{C}_m$) là đường tròn $\Leftrightarrow$ $a^2 + b^2 - c > 0$

$\Leftrightarrow \quad m^2 + 4m^2 - (2m + 3) > 0$

$\Leftrightarrow \quad 5m^2 - 2m - 3 > 0$

$\Leftrightarrow \quad 5(m - 1)\left(m + \dfrac{3}{5}\right) > 0$

$\Leftrightarrow \quad m > 1 \quad \text{hoặc} \quad m < \dfrac{-3}{5}.$

Bài 91.

a) Phương trình ($\mathscr{C}_m$) : $x^2 + y^2 + (2 - m)x + 2my - 1 = 0$

có $a^2 + b^2 - c = \left(\dfrac{m-2}{2}\right)^2 + (-m)^2 + 1 = \left(\dfrac{m-2}{2}\right)^2 + m^2 + 1 > 0$

với mọi m.

Do đó $(\mathscr{C}_m)$ là đường tròn với mọi m.

Giả sử $M(x_0; y_0)$ là điểm cố định của họ $(\mathscr{C}_m)$ khi m thay đổi.

Khi đó ta có :

$$x_0^2 + y_0^2 + (2 - m)x_0 + 2my_0 - 1 = 0 \quad \text{với } \forall m$$

$$\Rightarrow \quad (2y_0 - x_0)m + x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \quad \text{với } \forall m$$

Điều này xảy ra khi và chỉ khi :

$$\begin{cases} 2y_0 - x_0 = 0 \\ x_0^2 + y_0^2 + 2x_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2y_0 & (1) \\ 4y_0^2 + y_0^2 + 4y_0 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Từ (2) : $5y_0^2 + 4y_0 - 1 = 0$

Suy ra : $y_0 = -1$; $y_0 = \dfrac{1}{5}$

- Với $y_0 = -1$ thì $x_0 = -2 \Rightarrow M_1(-2; -1)$
- Với $y_0 = \dfrac{1}{5}$ thì $x_0 = \dfrac{2}{5} \Rightarrow M_2\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$

Vậy họ đường tròn $(\mathscr{C}_m)$ luôn đi qua hai điểm cố định $M_1(-2; -1)$ và $M_2\left(\dfrac{2}{5}; \dfrac{1}{5}\right)$ khi m thay đổi.

b) Khi m = –2 ta có $(\mathscr{C}_{-2}) : x^2 + y^2 + 4x - 4y - 1 = 0$

Tâm của đường tròn $I(-2; 2)$ và bán kính $R = 3$.

Vì $A(0; -1)$ không thuộc đường tròn $(\mathscr{C}_{-2})$ nên gọi phương trình tiếp tuyến với $(\mathscr{C}_{-2})$ đi qua điểm $A(0; -1)$ là :

$\Delta : Ax + B(y + 1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + B = 0 \quad (A^2 + B^2 \neq 0)$

Δ tiếp xúc với $(\mathscr{C}_{-2}) \Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{|-2A + 2B + B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 3 \quad \Leftrightarrow \quad 5A^2 + 12AB = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad A(5A + 12B) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ 5A + 12B = 0 \end{array}\right.$$

- Nếu $A = 0$, phương trình tiếp tuyến cần tìm có dạng

  $(\Delta) : By + B = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B(y + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y + 1 = 0$

  (vì $A^2 + B^2 \neq 0$ mà $A = 0$ thì $B \neq 0$)

- Nếu $5A + 12B = 0$. Ta chọn $B = -5$ thì $A = 12$ nên phương trình tiếp tuyến $(\Delta) : 12x - 5y - 5 = 0$.

  Vậy có hai tiếp tuyến kẻ từ $A(0; -1)$ đến đường tròn $(\mathscr{C}_{-2})$ là :

$$y + 1 = 0 \quad \text{và} \quad 12x - 5y - 5 = 0.$$

§3. PHƯƠNG TRÌNH ELIP

Bài 92.

a) $(E) : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ có $a^2 = 25$ nên $A_1(-5; 0)$ và $A_2(5; 0)$

$b^2 = 16$ nên $B_1(0; -4)$ và $B_2(0; 4)$.

b) • $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16 = 9$ nên tiêu điểm $F_1(-3; 0)$ và $F_2(3; 0)$

• Tâm sai $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$.

Bài 93.

a) $(E) : 9x^2 + 4y^2 = 36 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$

$a^2 = 4 < b^2 = 9$ nên $c^2 = b^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{5}$$

Tọa độ các tiêu điểm : $F_1(0; -\sqrt{5})$ và $F_2(0; \sqrt{5})$.

b) (E) có : • Độ dài trục lớn $2b = 2.3 = 6$

• Độ dài trục nhỏ $2a = 2.2 = 4$

Tâm sai : $e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Bài 94.

a) Ta có : $2a = 10 \Rightarrow a = 5$

$2b = 8 \Rightarrow b = 4$

Vậy phương trình chính tắc của elip là : $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

b) $2b = 6 \Rightarrow b = 3$

$2c = 4 \Rightarrow c = 2$

$a^2 = b^2 + c^2 = 9 + 4 = 13 \Rightarrow a = \sqrt{13}$

Vậy phương trình chính tắc của elip là : $\frac{x^2}{13} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Bài 95. Ta có : $F_1F_2 = 2c \Rightarrow 2c = \sqrt{(5+1)^2} = 6 \Rightarrow c = 3$.

Vì $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5}$ mà $c = 3 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow 2a = 10$

Vậy độ dài trục lớn của (E) là 10.

Lấy $M(x; y) \in (E)$ ta có : $MF_1 + MF_2 = 10$ (1)

$MF_1^2 = (-1 - x)^2 + (0 - y)^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2$ (2)

$MF_2^2 = (5 - x)^2 + (0 - y)^2 = x^2 - 10x + 25 + y^2$ (3)

Suy ra :

$$MF_1 - MF_2 = \frac{MF_1^2 - MF_2^2}{MF_1 + MF_2} = \frac{12x - 24}{10} = \frac{6x - 12}{5} \quad (4)$$

Từ (1) và (4) : $2MF_1 = \frac{6x + 38}{5} \Rightarrow MF_1 = \frac{3x + 19}{5}$

Thay vào (2) ta có : $\left(\frac{3x+19}{5}\right)^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2$

$\Leftrightarrow \quad 9x^2 + 114x + 361 = 25x^2 + 50x + 25 + 25y^2$

$\Leftrightarrow \quad 16x^2 + 25y^2 - 64x - 336 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 16(x^2 - 4x) + 25y^2 - 336 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 16(x^2 - 4x + 4) + 25y^2 = 400$

$\Leftrightarrow \quad 16(x - 2)^2 + 25y^2 = 400$

$\Leftrightarrow \quad \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ là phương trình của elip.

Bài 96. Tọa độ giao điểm của (d) và (E) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ y = x + m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2 + 9(x+m)^2 = 36 \\ y = x + m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 13x^2 + 18mx + 9m^2 - 36 = 0 \quad (1) \\ y = x + m \end{cases}$$

Đường thẳng (d) và (E) có điểm chung $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có nghiệm, nghĩa là :

$\Delta' \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (9m)^2 - 13(9m^2 - 36) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad -36m^2 + 468 \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad 36m^2 \leq 468$

$\Leftrightarrow \quad m^2 \leq 13$

$\Leftrightarrow \quad -\sqrt{13} \leq m \leq \sqrt{13}.$

Bài 97. Ta có : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$

- Giả sử đường thẳng $mx + ny + p = 0$ có $n \neq 0$ thì (d) có dạng

$$y = -\frac{mx + p}{n}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (E) và (d) là :

$$b^2x^2 + a^2\left(\frac{mx + p}{n}\right)^2 = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad b^2x^2 + a^2\left(\frac{m^2x^2 + 2mpx + p^2}{n^2}\right) = a^2b^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (n^2b^2 + a^2m^2)x^2 + 2a^2mpx + a^2(p^2 - n^2b^2) = 0$$

Để (d) tiếp xúc (E) $\Leftrightarrow \Delta' = 0$

$$\Leftrightarrow \quad (a^2mp)^2 - (n^2b^2 + a^2m^2).a^2(p^2 - n^2b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4m^2p^2 - (n^2b^2 + a^2m^2)(a^2p^2 - a^2n^2b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^4m^2p^2 - a^2b^2n^2p^2 + a^2b^4n^4 - a^4m^2p^2 + a^4m^2n^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad -a^2b^2n^2p^2 + a^2b^4n^4 + a^4m^2n^2b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2b^2m^2n^2 + b^4n^4 - b^2n^2p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2m^2 + b^2n^2 - p^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2m^2 + b^2n^2 = p^2$$

$$\Leftrightarrow \quad (am)^2 + (bn)^2 = p^2$$

- Nếu $n = 0$ thì (d) : $x = \frac{-p}{m}$

Phương trình tung độ giao điểm của (d) và (E) là :

$$\frac{b^2p^2}{m^2} + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a^2m^2y^2 = a^2b^2m^2 - b^2p^2$$

Do $a \neq 0$; $m \neq 0$, để (d) và (E) tiếp xúc

$$\Leftrightarrow \quad \Delta' = a^2m^2(a^2b^2m^2 - b^2p^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad a^2b^2m^2 - b^2p^2 = 0$$

$\Leftrightarrow \quad a^2m^2 - p^2 = 0$

$\Leftrightarrow \quad a^2m^2 = p^2$

$\Leftrightarrow \quad a^2m^2 + b^2n^2 = p^2 \quad$ (do n = 0)

$\Leftrightarrow \quad (am)^2 + (bn)^2 = p^2$

Vậy (d) tiếp xúc với (E) $\Leftrightarrow$ $(am)^2 + (bn)^2 = p^2$.

§4. ĐƯỜNG HYPERBOL

Dạng 1. **Tìm các yếu tố của hyperbol khi biết phương trình của hyperbol đó**

Bài 98. Ta có : (H) : $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

- Tâm O(0; 0).
- Trục thực là trục Ox có độ dài xác định :

$$a^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a = 5 \quad \Rightarrow \quad 2a = 10$$

- Trục ảo là trục Oy có độ dài xác định :

$$b^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad b = 4 \quad \Rightarrow \quad 2b = 8$$

Ta có : $c^2 = a^2 + b^2 = 25 + 16 = 41$

$\Rightarrow \quad c = \sqrt{41}$

Do đó hai tiêu điểm của (H) là : $F_1(-\sqrt{41}; 0)$, $F_2(\sqrt{41}; 0)$

Tâm sai : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{41}}{5}$

Phương trình hai đường tiệm cận :

$$(d_{1,2}) : \frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{y^2}{16} = \frac{x^2}{25}$$

$$\Leftrightarrow \quad y^2 = \frac{16}{25}x^2 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm\frac{4}{5}x.$$

Bài 99. (H) : $x^2 - 9y^2 = 9$ có phương trình chính tắc : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 1$

a) • Tâm O(0; 0).

• Trục thực là trục Ox có độ dài xác định :

$$a^2 = 9 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow 2a = 6$$

• Trục ảo là trục Oy có độ dài xác định :

$$b^2 = 1 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow 2b = 2$$

Ta có : $c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 1 = 10$

$\Rightarrow c = \sqrt{10}$.

Do đó hai tiêu điểm của (H) là $F_1(-\sqrt{10}; 0)$, $F_2(\sqrt{10}; 0)$.

Tâm sai : $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{10}}{3}$.

b) Phương trình hai đường tiệm cận :

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{1} = 0 \Leftrightarrow y^2 = \frac{x^2}{9} \Leftrightarrow y = \pm\frac{1}{3}x.$$

Dạng 2. Lập phương trình hyperbol

Bài 100.

Phương trình chính tắc của hyperbol (H) có dạng $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ta có : $2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

Mặt khác phương trình có hai tiệm cận là $y = \pm\frac{2}{3}$ nên $\frac{b}{a} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow b = \frac{2}{3}a = \frac{2}{3}.3 = 2 \Rightarrow b^2 = 4$$

Vậy phương trình cần lập là : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$.

Bài 101.

a) Phương trình chính tắc của hyperbol có dạng : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vì hyperbol có nửa trục ảo bằng 3 nên $b = 3 \Rightarrow b^2 = 9$.

Vì hyperbol có tiêu cự bằng 10 nên

$$2c = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow c^2 = 25.$$

Ta có : $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 = c^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$

$$\Rightarrow a = 4 \Rightarrow a^2 = 16$$

Vậy phương trình cần lập : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

b) Phương trình chính tắc của hyperbol có dạng : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Vì (H) đi qua điểm $M(\sqrt{10}; 3)$ nên : $\frac{10}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1$ (1)

Vì (H) có tâm sai $e = \frac{c}{a} = \sqrt{10} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = 10$

$$\Rightarrow \frac{c^2 - a^2}{a^2} = \frac{10 - 1}{1} = 9$$

$$\Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = 9$$

$$\Rightarrow b^2 = 9a^2 \qquad (2)$$

Thay (2) vào (1) : $\frac{10}{a^2} - \frac{9}{9a^2} = 1 \Rightarrow \frac{10}{a^2} - \frac{1}{a^2} = 1$

$$\Rightarrow a^2 = 9 \Rightarrow a = 3$$

Thay $a = 3$ vào (2) : $b^2 = 81 \Rightarrow b = 9$

Vậy phương trình cần lập : $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{81} = 1$.

Dạng 3. Quan hệ giữa đường thẳng và hyperbol

Bài 102. Ta có : (H) : $x^2 - \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 9 = y^2$

$(\Delta) : x - y + m = 0 \Leftrightarrow y = x + m$

$\Leftrightarrow y^2 = x^2 + 2mx + m^2$

Phương trình hoành độ giao điểm của (H) và (Δ) là :

$$9x^2 - 9 = x^2 + 2mx + m^2$$

$$\Leftrightarrow 8x^2 - 2mx - m^2 - 9 = 0 \quad (1)$$

Vì phương trình (1) có tích $a.c = -8(m^2 + 9) < 0$ với mọi m nên phương trình (1) luôn có hai nghiệm phân biệt x_A và x_B khác dấu.

Vậy (Δ) luôn cắt (H) tại hai điểm phân biệt A và B thuộc hai nhánh khác nhau của (H).

Bài 103. Ta có : (H) : $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1$ nên (H) có :

- Trục thực là Ox có độ dài được xác định bởi :

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow 2a = 8$$

- Trục ảo là trục Oy có độ dài được xác định bởi :

$$b^2 = 4 \Rightarrow b = 2 \Rightarrow 2b = 4$$

Suy ra : $c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 4 = 20$

$\Rightarrow c = 2\sqrt{5}$

nên hai tiêu điểm $F_1(-2\sqrt{5}; 0)$ và $F_2(2\sqrt{5}; 0)$.

- Có hai tiệm cận : $y = \pm\frac{b}{a} = \pm\frac{1}{2}$

Đường thẳng (Δ) đi qua M(2; –1) nên có phương trình :

$$A(x - 2) + B(y + 1) = 0 \Leftrightarrow Ax + By + B - 2A = 0$$

Đường thẳng (Δ) tiếp xúc (H)

$\Leftrightarrow \quad 16A^2 - 4B^2 = (B - 2A)^2$

$\Leftrightarrow \quad 16A^2 - 4B^2 = B^2 - 4AB + 4A^2$

$\Leftrightarrow \quad 12A^2 = 5B^2 - 4AB$

Thay A = 1, ta có :

$$12 = 5B^2 - 4B \Leftrightarrow 5B^2 - 4B - 12 = 0$$

$$\Leftrightarrow B = 2; \quad B = \frac{-6}{5}$$

- Với A = 1; B = 2 thì (Δ_1) : $x + 2y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}x$ chính là một tiệm cận của (H) nên ta loại bỏ trường hợp này.

- Với A = 1; $B = \frac{-6}{5}$ thì (Δ_2) : $x - \frac{6}{5}y - \frac{6}{5} - 2 = 0$

$$\Leftrightarrow 5x - 6y - 16 = 0$$

Vậy đường thẳng (Δ) đi qua M(2; –1) và tiếp xúc với (H) là :

$$5x - 6y - 16 = 0.$$

§5. ĐƯỜNG PARABOL

Dạng 1. **Tìm các yếu tố của parabol khi biết phương trình parabol đó**

Bài 104. (P) : $y^2 = 6x \Rightarrow 2p = 6 \Rightarrow p = 3$

Vậy (P) có tiêu điểm là $F\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ và phương trình đường chuẩn (Δ) là : $x = -\frac{3}{2}$.

Bài 105. Ta có : (P) : $y = -\frac{1}{3}(x^2 - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}$

$$\Leftrightarrow x^2 = -3\left(y - \frac{2}{3}\right)$$

Đặt X = x; $Y = y - \frac{2}{3}$ ta được phương trình $X^2 = -3Y$.

Đây là parabol với tiêu điểm có tọa độ X = 0 và $Y = -\frac{3}{4}$.

Suy ra x = 0 và $y = Y + \frac{2}{3} = \frac{-3}{4} + \frac{2}{3} = \frac{-1}{12}$

Vậy tọa độ tiêu điểm $F\left(0; \frac{-1}{12}\right)$.

Bài 106.

a) Ta có : $\begin{cases} y^2 = x \\ y^2 = 2px \end{cases} \Rightarrow 2p = 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

Vậy tham số tiêu của parabol là $p = \frac{1}{2}$.

b) Parabol có tiêu điểm $F\left(\frac{1}{4}; 0\right)$.

c) Đường chuẩn (Δ) của parabol là $x = \frac{-1}{4}$.

Dạng 2. Lập phương trình của parabol

Bài 107. Phương trình chính tắc của parabol (P) có dạng $y^2 = 2px$ có tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

a) Vì (P) có tiêu điểm F(3; 0) nên $\frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6$.

Vậy parabol cần tìm là : $y^2 = 12x$.

b) Vì (P) có tham số tiêu $p = \frac{1}{3}$ nên parabol cần tìm là $y^2 = \frac{2}{3}x$.

c) Vì (P) đi qua điểm M(1; −1) nên $(-1)^2 = 2.p.1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

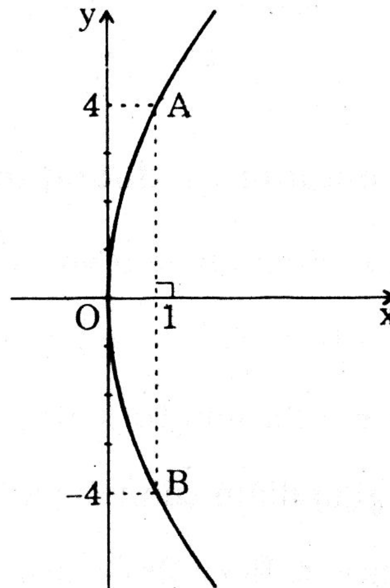
Vậy parabol cần tìm là : $y^2 = x$.

Bài 108.

a) Phương trình chính tắc của (P) có dạng $y^2 = 2px$.

Vì (P) nhận đường thẳng (Δ) : $x = -2$ làm đường chuẩn nên tham số tiêu $p = 4$.

Vậy parabol cần tìm là : $y^2 = 8x$.



b) Phương trình chính tắc của parabol có dạng $y^2 = 2px$.

Đường thẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ $x = 1$ cắt (P) tại hai điểm A và B sao cho $AB = 8$.

Suy ra $A(1; 4)$ và $B(1; -4)$.

Vì $A(1; 4) \in (P)$ nên $16 = 2.p.1 \Rightarrow p = 8$

Vậy parabol cần tìm là : $y^2 = 16x$.

Bài 109. Ta có parabol cần tìm nhận $F(2; 1)$ là tiêu điểm và đường thẳng (Δ) : $x + y + 1 = 0$ làm đường chuẩn.

Gọi $M(x; y) \in (P) \Leftrightarrow d(M, \Delta) = MF$ (1)

Mà $d(M, \Delta) = \dfrac{|x + y + 1|}{\sqrt{2}}$

$\vec{MF} = (2 - x; 1 - y) \Rightarrow MF = \sqrt{(2 - x)^2 + (1 - y)^2}$

Do đó (1) $\Leftrightarrow$ $\dfrac{|x+y+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(2-x)^2 + (1-y)^2}$

$\Leftrightarrow$ $\dfrac{(x+y+1)^2}{2} = (2-x)^2 + (1-y)^2$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 + 1 + 2xy + 2x + 2y = 2(4 - 4x + x^2 + 1 - 2y + y^2)$

$\Leftrightarrow$ $x^2 + y^2 - 10x - 6y - 2xy + 9 = 0$ là phương trình parabol cần tìm.

Dạng 3. Quan hệ giữa parabol với đường thẳng

Bài 110. Đường thẳng (Δ) cùng phương với đường thẳng

$(\Delta') : 2x - y = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y = 2x$

nên (Δ) có dạng : $y = 2x + m$ $(m \neq 0)$.

Vì A và B là hai giao điểm của (P) và (Δ) nên ta có :

$A(x_1; 2x_1 + m)$ và $B(x_2; 2x_2 + m)$

với x_1 và x_2 là hai nghiệm của phương trình :

$x^2 - 2x + 3 = 2x + m \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 4x + 3 - m = 0 \quad (1)$

$\Delta' = 4 - (3 - m) = m + 1$

Để phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow m > -1$ (*)

Áp dụng định lí Viet ta có : $\begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ x_1x_2 = 3 - m \end{cases}$

Vì $AB = 10$ nên $AB^2 = 100$

$\Leftrightarrow$ $(x_1 - x_2)^2 + (2x_1 + m - 2x_2 - m)^2 = 100$

$\Leftrightarrow$ $x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1^2 + 4x_2^2 - 8x_1x_2 = 100$

$\Leftrightarrow$ $5(x_1 - x_2)^2 = 100$

$\Leftrightarrow$ $(x_1 + x_2)^2 = 20$

$\Leftrightarrow \quad (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20$

$\Leftrightarrow \quad 16 - 12 + 4m = 20$

$\Leftrightarrow \quad 4m = 16$

$\Leftrightarrow \quad m = 4$ thỏa mãn điều kiện (*)

Vậy phương trình đường thẳng (Δ) cần tìm là : $y = 2x + 4$.

Bài 111. Dây AB nhận $M\left(\frac{3}{4}; \frac{17}{4}\right)$ làm trung điểm nên phương trình của dây AB là : $y - \frac{17}{4} = m\left(x - \frac{3}{4}\right)$

$$\Leftrightarrow \quad y = mx + \frac{17}{4} - \frac{3m}{4}$$

Phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (AB) là :

$$2x^2 = mx + \frac{17}{4} - \frac{3m}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad 8x^2 - 4mx + 3m - 17 = 0 \qquad (1)$$

Ta có : $\Delta' = 4(m^2 - 6m + 34) > 0$ với mọi m nên phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt.

Hoành độ giao điểm A và B theo thứ tự x_A, x_B là nghiệm của (1).

Theo đề ta có :

$$\frac{x_A + x_B}{2} = x_M \quad \Leftrightarrow \quad x_A + x_B = 2x_M$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{4m}{8} = 2.\frac{3}{4} \quad \Leftrightarrow \quad m = 3$$

Vậy phương trình đường thẳng chứa dây AB là : $y = 3x + 2$.

Bài 112. (P) : $y^2 = 2x$ nên tọa độ tiêu điểm $F\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

Gọi $M(x_0; y_0)$ là tọa độ điểm cố định mà (Δ) luôn đi qua với mọi m.

Ta có : $2x_0 - 2my_0 - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \quad 2my_0 = 2x_0 - 1$ với mọi m

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2y_0 = 0 \\ 2x_0 - 1 = 0 \end{cases}$ với mọi m

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} y_0 = 0 \\ x_0 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

Vậy đường thẳng (Δ) : $2x - 2my - 1 = 0$ luôn đi qua điểm cố định $M\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$ cũng chính là tiêu điểm $F\left(\dfrac{1}{2}; 0\right)$.

- Chứng minh đường thẳng (Δ) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Tọa độ giao điểm của (Δ) và (P) là nghiệm của hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x - 2my - 1 = 0 \\ y^2 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2my + 1}{2} \\ y^2 = 2my + 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2my + 1}{2} & (1) \\ y^2 - 2my - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$

Phương trình (2) có $\Delta' = m^2 + 1 > 0$ với mọi m nên phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt, nghĩa là hệ phương trình trên luôn có hai nghiệm với mọi m.

Nói cách khác, đường thẳng (Δ) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt.

Bài 113. Vì đường thẳng cần lập (d) vuông góc với đường thẳng (Δ) : $3x - 2y + 6 = 0$ nên (d) có dạng là : $2x + 3y + m = 0$.

Mặt khác : (P) : $y^2 = 16x$ nên $p = 8$

(d) tiếp xúc (P) $\Leftrightarrow$ $B^2p = 2.A.C$

$\Leftrightarrow$ $9.8 = 2.2.m$

$\Leftrightarrow$ $72 = 4m$

$\Leftrightarrow$ $m = 18$

Vậy đường thẳng (d) cần tìm là : $2x + 3y + 18 = 0$.

Bài 114. Xét điểm $N(x_N; x_N^2) \in (P) : y = x^2$

Ta có : $MN = \sqrt{x_N^2 + (x_N^2 - 2)^2}$

$\Leftrightarrow$ $MN^2 = x_N^2 + (x_N^4 - 4x_N^2 + 4)$

$\Leftrightarrow$ $MN^2 = x_N^4 - 3x_N^2 + 4$

$$= \left[\left(x_N^2\right)^2 - 2x_N^2.\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right] - \frac{9}{4} + 4$$

$$= \left(x_N^2 - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \geq \frac{7}{4}$$

Vậy $\text{Max}\,(MN^2) = \frac{7}{4}$ $\Leftrightarrow$ $x_N^2 - \frac{3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow$ $x_N^2 = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow$ $x_N = \pm\sqrt{\frac{3}{2}} = \pm\frac{1}{2}\sqrt{6}$

Suy ra $y_N = \left(\pm\frac{1}{2}\sqrt{6}\right)^2 = \frac{3}{2}$

Vậy có hai điểm N thỏa mãn đề bài là :

$$N_1\left(\frac{1}{2}\sqrt{6}; \frac{3}{2}\right) \text{ và } N_2\left(-\frac{1}{2}\sqrt{6}; \frac{3}{2}\right).$$

Bài 115.

a) Ta có : (P) : $y^2 = 2x$ nên $p = 1$.

Do đó tọa độ tiêu điểm $F\left(\frac{1}{2}; 0\right)$.

b) Đường thẳng (Δ) đi qua $F\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ và song song với trục Oy nên cắt (P) tại hai điểm $M(x_1; y_1)$ và $N(x_2; y_2)$ với $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}$.

Vì (P) : $y^2 = 2x$ nên nhận trục Ox làm trục đối xứng.

Suy ra $MN = 2MF = 2\left(x_1 + \frac{p}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = 2.$

MỤC LỤC

BÀI GIẢI

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối – Hai Bà Trưng – Hà Nội

Điện thoại: (04) 39714896; (04) 39724770. Fax: (04) 39714899

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc: PHÙNG QUỐC BẢO

Tổng biên tập: PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: LAN HƯƠNG

Trình bày bìa: NHÀ SÁCH SAO MAI

Đối tác liên kết xuất bản:

NHÀ SÁCH SAO MAI

SÁCH LIÊN KẾT

Phân loại và phương pháp giải các dạng toán Hình học 10

Mã số: 1L – 1762ĐH2009

In 2000 cuốn, khổ 16 × 24cm tại Xí nghiệp In Đường Sắt.

Số xuất bản: 520 – 2009/CXB/07 – 83/ĐHQGHN, ngày 12/6/2009.

Quyết định xuất bản số: 176LK-TN/XB.

In xong và nộp lưu chiểu quý III năm 2009.